

Kegelschnitte

Ergänzung zu den Kapiteln 7 Skalarprodukt und 11 Eigenwerte und Eigenvektoren

Dies ist ein Ergänzungsartikel zum Buch *Lineare Algebra: Eine anwendungsorientierte Einführung*, von Andreas Müller. Erschienen im Verlag Springer-Vieweg, ISBN 978-3-662-67865-7 und ISBN 978-3-662-67866-4 (eBook).

<https://doi.org/10.1007/978-3-662-67866-4>

Die Rechte an den Bilder gehören den in der Bildunterschrift angegebenen Bildquellen, wenn keine Quelle angegeben ist dem Autor. Die Teile des Autors werden unter der Lizenz CC BY-SA 4.0 zur Verfügung gestellt, Details: <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>.

Website zum Buch: <https://linalg.ch>

Springer-Link: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-67866-4>

Kegelschnitte

Andreas Müller

Zusammenfassung

Im Abschnitt 7.7 wurde das Skalarprodukt verwendet, um Kreise und Kugeln zu beschreiben. Sie zeichnen sich durch die Eigenschaft eines Punktes aus, vom Mittel gleich weit entfernt zu sein. Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln sind durch leicht kompliziertere Abstandsbedingungen definiert. Sie haben wie Kreise eine quadratische Gleichung, die besonders einfach wird, wenn Achsen der Kurven parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen und der Mittelpunkt mit dem Nullpunkt des Koordinatensystems übereinstimmt. Matrizen ermöglichen, die Gleichung eines Kegelschnittes besonders kompakt und allgemein zu schreiben. Zum Beispiel kann damit gezeigt werden, dass jedes projektive Bild eines Kegelschnitts wieder ein Kegelschnitt ist, oder wie mit der Methode der kleinsten Quadrate eine Ellipse gefunden werden kann, die möglichst genau durch vorgegebene Punkte verläuft.

1 Abstandsdefinition

Ein Kreis in der Ebene besteht aus den Punkten, die vom Mittelpunkt M konstanten Abstand r haben. Eine einfache Modifikation dieser Bedingung führt auf die Ellipse, die in Abschnitt 1.1 besprochen wird. Varianten davon führen dann auch auf Hyperbeln und Parabeln.

1.1 Ellipse

Eine Ellipse ist charakterisiert durch die Abstände von zwei vorgegebenen Punkten anstelle von nur einem Punkt.

Definition 3.1 (Ellipse). *Die Ellipse mit den Brennpunkten F_1 und F_2 und der großen Halbachse a besteht aus den Punkten*

$$\{P \mid \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a\},$$

deren Abstandssumme von den Brennpunkten $2a$ ist.

Falls die beiden Punkte $F_1 = F_2 = M$ übereinstimmen, entsteht der Kreis mit Radius $r = a$ mit den Punkten als Mittelpunkt. Ein weiterer Extremfall ist $2a = \overline{F_1F_2}$. In diesem Fall muss ein Punkt P auf der Strecke zwischen F_1 und F_2 liegen. Falls $2a < \overline{F_1F_2}$ ist, gibt es keine Punkte, die die Bedingung erfüllen.

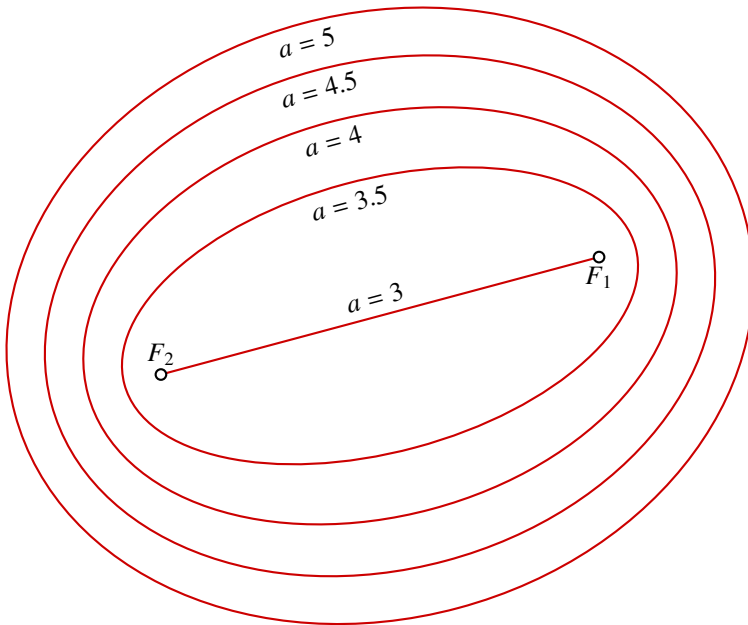


Abbildung 1: Ellipse mit den Brennpunkten F_1 und F_2 für verschiedene Werte der großen Halbachse a . Da die Entfernung $\overline{F_1F_2} = 6$ ist, entartet die Ellipse für $a = 3$ zur Strecke $\overline{F_1F_2}$.

Eine Ellipse ist also eine Art ‘‘Oval’’, welches um die beiden Brennpunkte herum verläuft. Die Ellipsen zu gegebenen Brennpunkten F_1 und F_2 und verschiedenen großen Halbachsen a sind in Abbildung 1 dargestellt. Je näher beieinander die beiden Punkte F_1 und F_2 liegen, desto ähnlicher wird die Kurve einem Kreis.

Durch spezielle Wahl der Brennpunkte auf der x -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems lassen sich die Abmessungen der Ellipse besser charakterisieren. In Abbildung 2 liegen die Punkte F_1 und F_2 bei den Koordinaten $(e, 0)$ und $(-e, 0)$, sie sind jeweils gleich weit vom nächsten Scheitelpunkt entfernt, also $\overline{F_1S_1} = \overline{F_2S_2}$. Die Scheitelpunkte S_1 und S_2 müssen ausserdem die Abstandsbedingung

$$2a = \overline{S_1F_1} + \overline{S_1F_2} = \overline{S_2F_2} + \overline{S_1F_2} = \overline{S_1S_2}$$

erfüllen. Die Scheitelpunkte haben daher die Koordinaten $(\pm a, 0)$, dies erklärt die Bezeichnung große Halbachse für a .

Die Punkte $(0, \pm b)$ liegen auf der y -Achse und müssen ebenfalls die Abstandsbedingung erfüllen. Dies ist nur möglich, wenn ihr Abstand zu den Brennpunkten a ist. Nach dem Satz des Pythagoras ist daher $a^2 = b^2 + e^2$.

Definition 3.2 (Exzentrizität, kleine Halbachse). *Der halbe Abstand $e = \frac{1}{2}\overline{F_1F_2}$ der Brennpunkte einer Ellipse heißt die lineare Exzentrizität der Ellipse. Die Strecke $b = \sqrt{a^2 - e^2}$ heißt die kleine Halbachse der Ellipse.*

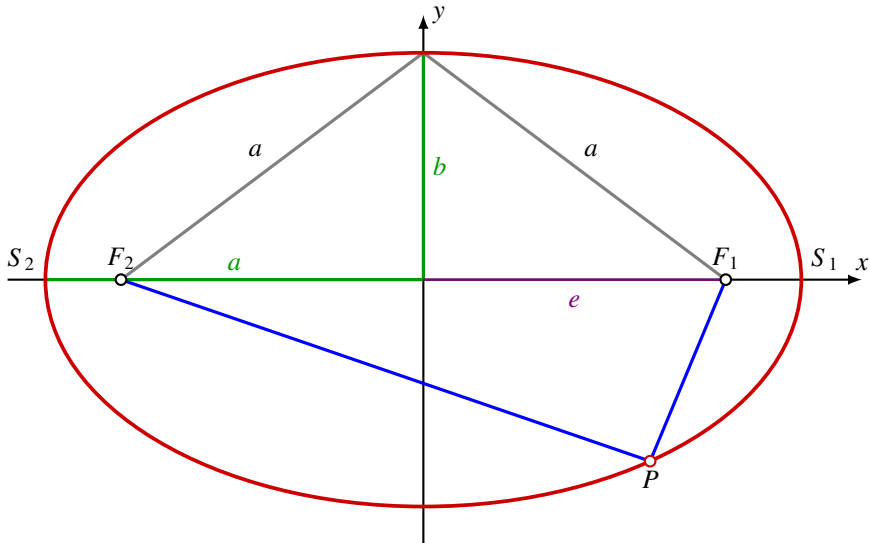


Abbildung 2: Eine Ellipse besteht aus den Punkten P , deren Abstandssumme $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ ist.

In der Definition 3.1 wird die Ellipse durch die beiden Brennpunkte und die große Halbachse charakterisiert. Daraus lässt sich immer ein Koordinatensystem konstruieren, welches als Nullpunkt des Koordinatensystems wird der Mittelpunkt der Strecke F_1F_2 verwendet, die x -Achse ist die Gerade durch F_1 und F_2 . Eine Ellipse kann also auch durch die beiden Halbachsen a und b , den Mittelpunkt und die Richtung der großen Halbachse beschrieben werden.

1.2 Hyperbel

Verwendet man statt der Summe der Abstände die Differenz, entsteht die Hyperbel.

Definition 3.3 (Hyperbel). *Eine Hyperbel mit den Brennpunkten F_1 und F_2 und der großen Halbachse a ist die Menge der Punkte P mit der Eigenschaft, daß die Differenz der Entfernungen zu den Brennpunkten*

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \pm 2a \quad (1)$$

konstant ist. Die beiden Kurven für die verschiedenen Vorzeichen in (1) heißen die Äste der Hyperbel.

Abbildung 3 links zeigt die beiden Äste der Hyperbel. Wie die Ellipse ist auch die Hyperbel symmetrisch bezüglich der Achse durch die beiden Brennpunkte. Sie ist ausserdem punktsymmetrisch bezüglich des Mittelpunktes der Strecke F_1F_2 . Ebenso kann man erkennen, dass die Scheitelpunkte die Entfernung a vom Symmetriezentrum haben. Die Entfernung der Brennpunkte vom Mittelpunkt wird wieder mit e bezeichnet.

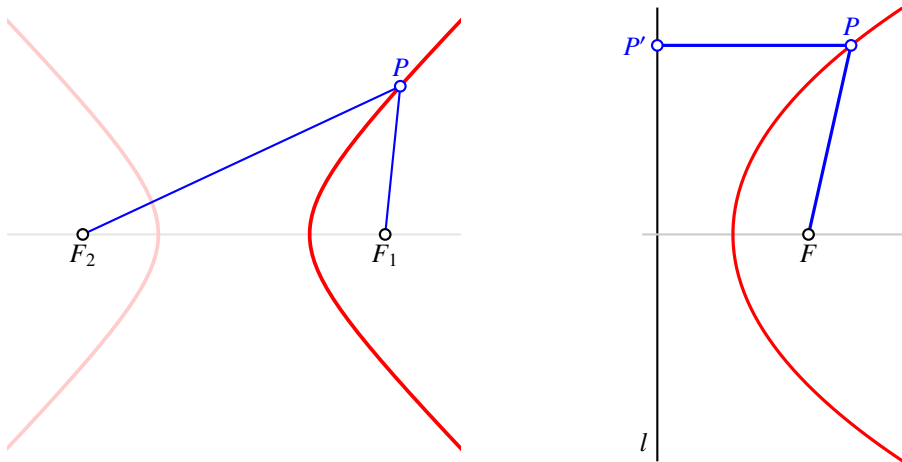


Abbildung 3: Die Hyperbel (links) besteht aus Punkten, deren Abstandsunterschied von den Brennpunkten konstant ist. Die Parabel (rechts) besteht aus Punkten, die von einem Punkt und einer Geraden gleichen Abstand haben.

1.3 Optische Eigenschaften von Ellipsen und Hyperbeln

Die definierende Eigenschaft der Ellipse hat zur Folge, dass alle Wege von einem Brennpunkt zu einem Ellipsenpunkt und zurück zum anderen Brennpunkt gleich lang sind. Das fermatsche Prinzip besagt, dass Licht immer den kürzesten Weg nimmt. Ein elliptischer Spiegel fokussiert daher von F_1 ausgehendes Licht im Punkt F_2 .

Eine ähnliche Eigenschaft gilt auch für die Hyperbel. Im Punkt F_1 konvergierende Lichtstrahlen werden von einem hyperbolischen Spiegel im Punkt F_2 fokussiert, denn dadurch wird der Lichtweg für alle Strahlen um den gleichen Betrag $2a$ länger.

Mit diesen optischen Überlegungen lässt sich jetzt auch eine einfache Konstruktion für die Tangente an eine Hyperbel oder Ellipse angeben. Die Tangente an die Hyperbel im Punkt P ist die Winkelhalbierende des Winkels $\angle F_1PF_2$. Die Tangente an die Ellipse steht senkrecht auf der Normalen, die ihrerseits die Winkelhalbierende des Winkels $\angle F_1PF_2$ ist.

1.4 Parabel

Verschiebt man einen der Brennpunkte einer Ellipse oder Ellipse sehr weit weg, entsteht eine Kurve mit der Eigenschaft, dass parallel einfallendes Licht im verbleibenden Brennpunkt fokussiert wird. Der Weg des Lichtes ausgehend von einer senkrecht auf der Achse stehenden Wellenfront bis zum Brennpunkt ist also immer gleich groß. Die gesuchte Kurve kann daher auch auf die folgende Art charakterisiert werden.

Definition 3.4 (Parabel). *Die Parabel mit Brennpunkt P und Leitgerade l besteht aus den Punkten P , die von F und von der Geraden l den gleichen Abstand*

$$f = \overline{PF} = \overline{Pl}$$

haben. $f = \frac{1}{2}\overline{F'l}$ heißt auch die Brennweite.

Auch für die Parabel lässt sich aus der Beschreibung mit Hilfe optischer Eigenschaften eine Konstruktion der Tangenten angeben. Ist P' die Projektion von P auf die Leitgerade l , dann ist die Tangente im Punkt P die Winkelhalbierende des Winkels $\angle FPP'$.

Der Reflektor eines Autoscheinwerfers ist ein Rotationsparaboloid, damit das Licht der im Wesentlichen punktförmigen Lichtquelle zu einem parallelen Strahl gebündelt wird, welcher die Straße auf eine möglichst große Distanz ausleuchten kann. Aus Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln konstruierte Rotationsflächen bilden die Basis der Konstruktion von Spiegelteleskopen. Das Newtonsche Spiegelteleskop verwendet einen parabolischen Spiegel, der das von den Sternen einfallende Licht im Brennpunkt F fokussiert. Mit Hilfe eines ebenen Fangspiegels wird das Licht aus dem Teleskoptubus zur Seite reflektiert, wo das Bild mit einem Okular betrachtet werden kann. Ein Cassegrain-Teleskop verwendet statt des ebenen Spiegels einen hyperbolischen Spiegel, der das Licht durch ein Loch im Hauptspiegel in den zweiten Brennpunkt ausserhalb des Teleskops fokussiert. Statt eines hyperbolischen Spiegels kann auch ein elliptischer Spiegel verwendet werden, wie dies im Gregory-Teleskop verwendet werden.

2 Koordinatengleichungen

Für $F_1 = F_2 = O$ wird eine Ellipse zu einem Kreis, der die einfache Koordinatengleichung $x^2 + y^2 = r^2$. Kann man eine ähnlich einfache Koordinatengleichung für Ellipsen angeben?

2.1 Gleichung einer Ellipse

Die Ellipse in Abbildung 2 sieht aus wie ein Einheitskreis, der in x -Richtung um den Faktor a und in y -Richtung um den Faktor b gestreckt worden ist. Ein derart gestreckter Kreis hat die Koordinatengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2)$$

Wir möchten zeigen, dass dies tatsächlich eine Ellipse ist.

Satz 3.5 (Koordinatengleichung einer Ellipse). *Die Punkte einer Ellipse mit der großen Halbachse a und den Brennpunkte haben die Koordinaten $(\pm e, 0)$ mit $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ erfüllen die Gleichung (3).*

Beweis. Ein Punkt (x, y) der Ellipse erfüllt die Abstandsbedingung

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a, \quad (3)$$

die Ellipse definiert. Wir müssen zeigen, dass diese Gleichung gleichbedeutend mit der Gleichung (2) ist.

Die Wurzeln (3) können durch quadrieren eliminiert werden, was

$$(x+e)^2 + y^2 + 2\sqrt{((x+e)^2 + y^2)((x-e)^2 + y^2)} + (x-e)^2 + y^2 = 4a^2$$

ergibt. Isoliert man die Quadratwurzel auf der linken Seite, wird daraus

$$\sqrt{y^4 + 2x^2y^2 + 2e^2y^2 + x^4 - 2e^2x^2 + e^4} = 2a^2 - x^2 - e^2 - y^2.$$

Durch erneutes Quadrieren kann auch noch die Quadratwurzel auf der linken Seite zum Verschwinden gebracht werden:

$$y^4 + 2x^2y^2 + 2e^2y^2 + x^4 - 2e^2x^2 + e^4 = y^4 + 2x^2y^2 + 2e^2y^2 - 4a^2y^2 + x^4 + 2e^2x^2 - 4a^2x^2 + e^4 - 4a^2e^2 + 4a^4.$$

Einige Terme heben sich weg, es bleibt

$$-2e^2x^2 = -4a^2y^2 + 2e^2x^2 - 4a^2x^2 - 4a^2e^2 + 4a^4.$$

Indem alle Terme mit x und y auf die linke Seite bringt, entsteht

$$a^2x^2 - e^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2e^2$$

oder zusammengefasst

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2).$$

mit $b^2 = a^2 - e^2$ wird daraus

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

und nach Division durch a^2b^2

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Damit ist gezeigt, dass der Punkt (x, y) tatsächlich die Gleichung (3) erfüllt. \square

Da die trigonometrischen Funktionen die Identität

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

erfüllen, folgt aus der Gleichung (3), dass

$$\frac{x}{a} = \cos t \quad \text{und} \quad \frac{y}{b} = \sin t$$

gesetzt werden kann. Dies ergibt die Parametrisierung

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$$

der Ellipse.

2.2 Gleichung einer Hyperbel

Mit der gleichen Art von Rechnung wie im Beweis des Satzes 3.5 kann man auch für die Hyperbel eine entsprechende Koordinatengleichung finden.

Satz 3.6 (Koordinatengleichung einer Hyperbel). *Die Hyperbel mit Brennpunkten $(\pm e, 0)$ und der großen Halbachse a besteht aus den Punkte, die die Koordinatengleichung*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

erfüllen.

Mit Hilfe der hyperbolischen Funktionen lässt sich eine nützliche Parametrisierung der Hyperbel angeben. Die hyperbolischen Funktionen erfüllen

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

Aus der Gleichung (4) folgt, dass man

$$\frac{x}{a} = \cosh t \quad \text{und} \quad \frac{y}{b} = \sinh t$$

setzen kann. Vektoriell geschrieben erhält man sie die Parametrisierung

$$\gamma_+ : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \gamma_+(t) = \begin{pmatrix} a \cosh t \\ b \sinh t \end{pmatrix}.$$

Diese Parametrisierung beschreibt den Ast der Hyperbel im ersten und vierten Quadranten. Für den zweiten Ast im zweiten und dritten Quadranten kann man die Parametrisierung

$$\gamma_- : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \gamma_-(t) = \begin{pmatrix} -a \cosh t \\ b \sinh t \end{pmatrix}$$

verwenden.

2.3 Gleichung einer Parabel

Um die Koordinatengleichung einer Parabel zu konstruieren, verwenden wird $F = (f, 0)$ als Brennpunkt und als Leitgerade die zur y -Achse parallele Gerade durch den Punkt $(-f, 0)$. Die Abstandsbedingung eines Punktes (x, y) der Parabel wird dann

$$\sqrt{(x-f)^2 + y^2} = f + x.$$

Die Wurzel kann durch Quadrieren zum verschwinden gebracht werden. Es entsteht

$$x^2 - 2fx + f^2 + y^2 = f^2 + 2fx + x^2$$

oder vereinfacht

$$y^2 = 4fx.$$

Dies ist die Koordinatengleichung einer Parabel.

Satz 3.7 (Koordinatengleichung einer Parabel). *Die Punkte (x, y) , die die Gleichung $y^2 = 4fx$ erfüllen, bilden eine Parabel mit Brennweite f .*

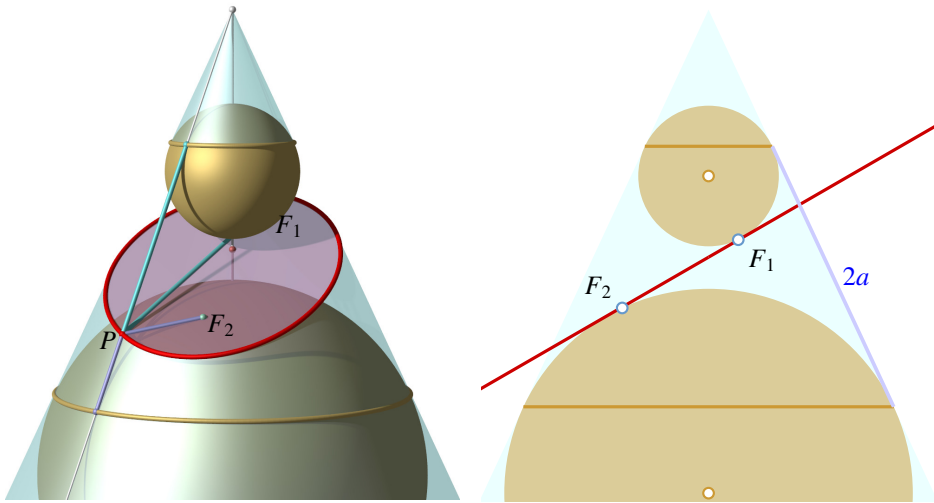


Abbildung 4: Dandelin-Kugeln und Kegelschnitteigenschaft. Die Abstände eines Punktes der Schnittkurve zu den Berührungspunkten der Dandelin-Kugeln sind Tangenten und daher gleich lang wie die Abschnitte der Mantellinie bis zum Berührungskreis der Kugeln. Die Summe der Abstände ist daher gleich gross wie der Abstand zwischen den Berührungskreisen. Die Schnittkurve ist daher eine Ellipse mit Brennpunkten F_1 und F_2 .

3 Dandelin-Kugeln

Ellipsen sind auch bekannt als Kegelschnitte. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass die Schnittkurve eines Kegels mit einer Ebene tatsächlich die Abstandsdefinition einer Ellipse oder Hyperbel erfüllt

Der Schnitt einer Ebene mit einem geraden Kreiskegel in einem Winkel, der größer als der halbe Öffnungswinkel des Kegels ist, ist in Abbildung 4 dargestellt. Die beiden in den Kegel eingeschriebenen Kugeln, die die Schnittebene in den Punkten F_1 und F_2 berühren, heißen die *dandelinischen Kugeln*. Die Strecke PF_i von einem Punkt P auf der Schnittkurve zu einem der Punkte F_i ist eine Tangente an die entsprechende Kugel. Sie ist daher gleich lang wie der Abschnitt der Mantellinie des Kegels vom Punkt P bis zum Berührungskreis der Kugel. Die Summe der Entfernungen von P zu den Punkten F_i ist daher der Abstand der beiden Berührungskreise und damit konstant. Somit ist gezeigt, dass die Schnittkurve eine Ellipse mit den Brennpunkten F_1 und F_2 ist. Die große Halbachse ist der halbe Abstand der beiden Berührungskreise.

Eine ähnliche Überlegung kann auf eine Schnittebene angewendet werden, die die Achse des Kegels in einem Winkel schneidet, der kleiner als der halbe Öffnungswinkel des Kegels ist. Die Schnittkurve ist in diesem Fall eine Hyperbel. Eine Schnittebene, die die Achse im halben Öffnungswinkel des Kegels schneidet, schneidet den Kegel in einer Parabel.

4 Matrixform der Gleichung

Die Schreibweise der Koordinatengleichungen in Abschnitt 2 ist nicht gut verallgemeinerungsfähig. Daher wird in diesem Abschnitt eine Matrizen Schreibweise entwickelt, mit der sich jeder beliebige Kegelschnitt in der Ebene beschreiben lässt.

4.1 Ellipse und Hyperbel

Die Koordinatengleichung (3) kann in Matrixform als

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{= A} = 1$$

geschrieben werden. Die Matrix A ist eine Diagonalmatrix. Schreiben v für den Vektor mit den Komponenten x und y , wird die Ellipsengleichung zu

$$v^t A v = 1$$

für $v \in \mathbb{R}$.

Die Koordinatengleichung einer Hyperbel unterscheidet sich nur das Vorzeichen des Terms y^2/b^2 . Die Gleichung einer Hyperbel in Matrixform wird daher

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{= B} = v^t B v = 1.$$

Für jede Diagonalmatrix D beschreibt die Gleichung $v^t D v = 1$ eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nach den Vorzeichen der Diagonalelemente.

4.2 Drehungen und Verschiebungen

Die Gleichung $v^t D v = 1$ beschreibt eine Ellipse oder Hyperbel mit Mittelpunkt im Nullpunkt des Koordinatensystems und Achsen parallel zu den Koordinatenachsen. Eine beliebige Ellipse oder Hyperbel entsteht durch Drehung und Verschiebung.

Wir betrachten zunächst eine beliebige Ellipse oder Hyperbel mit Mittelpunkt im Nullpunkt des Koordinatensystems. Ist O eine Drehmatrix, die die Achsen in die Richtung der Koordinatenachsen dreht, dann erfüllen die Punkte $v' = O v$ eine Gleichung der Form $v'^t D v' = 1$, oder

$$1 = O v'^t D O v = v^t \underbrace{(O^t D O)}_{= A} v.$$

Die Matrix A ist symmetrisch. Jede symmetrische Matrix kann mit einer Drehmatrix diagonalisiert werden. Jede Gleichung der Form $v^t A v = 1$ mit einer symmetrischen, regulären Matrix beschreibt eine Ellipse oder Hyperbel.

Durch eine Verschiebung kann der Mittelpunkt einer Ellipse in den Nullpunkt verschoben werden. Daraus lässt sich die allgemeine Koordinatengleichung für Ellipsen und Hyperbeln ableiten.

Satz 3.8 (Matrixform). *Jede Ellipse oder Hyperbel lässt sich als Lösungsmenge einer Gleichung*

$$(v - m)^t A (v - m) = 1 \quad (5)$$

schreiben, wobei m der Ortsvektor des Mittelpunktes ist und A eine symmetrische reguläre Matrix. Die Achsen haben die Richtung der Eigenvektoren der Matrix A .

4.3 Matrixform einer beliebigen quadratischen Gleichung

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass jede quadratische Gleichung in x und y in die Form (5) gebracht werden kann. Sei also

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \quad (6)$$

gegeben und soll in die Form (5) gebracht werden, die ausmultipliziert die Form

$$v^t A v - 2v^t A m + m^t A m = 1 \quad (7)$$

annimmt. Der Vergleich mit (6) suggeriert, die Gleichung als

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} + f = 0$$

zu schreiben. Der konstante Term der Matrixgleichung ist dadurch aber bereits vollständig festgelegt und es gibt keinen Grund, warum er mit dem konstanten Term f übereinstimmen soll.

Wir schaffen daher in beiden Gleichungen alle nicht von x und y abhängigen Terme auf die rechte Seite, und erhalten die Gleichungen

$$v^t A v - 2v^t A m = 1 - m^t A m \quad \text{und} \quad v^t \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}}_{= B} v - 2v^t \underbrace{\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}}_{= m_0} = -f.$$

Es wird offensichtlich, dass die beiden Gleichungen nicht unbedingt identisch sein können, dass sie sich vielmehr um einen Faktor unterscheiden können. Gesucht ist also ein Matrix A und ein Vektor m derart, dass

$$A = sB, \quad Am = sm_0 \quad \text{und} \quad sf = 1 - m^t A m.$$

Aus der mittleren Gleichung folgt

$$Am = sBm = sm_0 \quad \Rightarrow \quad m = B^{-1}m_0,$$

der Vektor m ist damit bereits unabhängig vom Wert von s festgelegt. Einsetzen von $A = sB$ in der dritten Gleichung liefert dann

$$\begin{aligned} sf = 1 - m^t sBm &\Rightarrow s(f + m^t Bm) = 1 \\ \Rightarrow s &= \frac{1}{f + m^t Bm} = \frac{1}{f + m_0^t (B^{-1})^t B B^{-1} m_0} = \frac{1}{f + m_0^t (B^{-1})^t m_0}. \end{aligned}$$

Damit ist s bestimmt und man kann auch A ausrechnen. Wir fassen diese Resultate im folgenden Satz zusammen.

Satz 3.9 (Matrixform einer quadratischen Gleichung). *Eine quadratische Gleichung der Form*

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

kann in der Form

$$(v - m)^t A (v - m) = 1 \quad \text{mit} \quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

geschrieben werden, die Matrix A und der Vektor m werden durch

$$A = \frac{1}{f + m_0^t (B^{-1})^t m_0} B \quad \text{und} \quad m = B^{-1} m_0.$$

aus

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad m_0 = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

bestimmt.

Die Herleitung der Resultate des Satzes ist nicht auf die Dimension 2 beschränkt, sie funktioniert auch für quadratische Gleichungen von beliebig vielen Variablen. Die geometrische Interpretation der Lösungsmenge ist möglicherweise etwas schwieriger, wir kommen in den zwei folgenden Abschnitten darauf zurück.

4.4 Affine Bilder von Kegelschnitten

Wir betrachten die Menge der Punkte, die die quadratische Gleichung

$$(v - m)^t A (v - m) = 1$$

erfüllen. Eine affine Abbildung der Lösungsmenge wird durch eine Matrix B beschrieben. Mit B sollen die Punkte der Kurve abgebildet werden sollen. Ist $v' = Bv$ ein Vektor, dann erfüllt $v = B^{-1}v'$ die Gleichung. Die Punkte v' des Bildes erfüllen daher die Gleichung

$$(B^{-1}v' - m)^t A (B^{-1}v' - m) = 1.$$

Die Faktoren B^{-1} können in die symmetrische Matrix verschoben werden, die Gleichung wird dadurch zu

$$(v' - Bm) \underbrace{(B^{-1})^t A B^{-1}}_{= A'} (v' - Bm) = 1$$

mit einer neuen symmetrischen Matrix A' . Wie erwartet ist der Mittelpunkt der Kurve Bm . Die Rechnung zeigt also, dass affine Bilder von Ellipsen und Hyperbeln wieder Ellipsen und Hyperbeln sind.

4.5 Projektive Bilder von Kegelschnitten

Welche Form erhält eine Ellipse, wenn sie mit einer Kamera abgebildet wird? In Kapitel 10 wurde gezeigt, wie man zu diesem Zweck homogene Koordinaten verwenden muss. Diese beschreiben Strahlen durch das Kamerazentrum, das Bild entsteht dann durch Schneiden dieser Strahlen mit der Bildebene.

Als Einführungsbeispiel betrachten wir den Einheitskreis in der x - y -Ebene. Die Kamera wird im Punkt $C = (0, 0, 1)$ auf der z -Achse platziert. Die vom Punkt C ausgehenden Strahlen bilden einen geraden Kreiskegel. Das Bild auf dem Kamerachip entsteht durch Schneiden dieses Kegels mit einer Ebene, deren Ausrichtung von Ausrichtung der Kamera abhängt. Abschnitt 3 zeigt, dass ganz unabhängig von der Ausrichtung der Kamera, die Schnittkurve immer eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, dass sie also Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung der Form $(v - m)^t A (v - m) = 1$ ist.

Etwas allgemeiner betrachten wir jetzt die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung der Form $(v - m)^t A (v - m) = 1$. Wir platzieren diese Punkte in die Ebene $z = 1$ in einem dreidimensionalen Raum, wir betrachten also die Menge

$$\left\{ (x, y, 1) \mid \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - m \right)^t A \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - m \right) = 1 \right\}.$$

Die Verschiebung um m kann als Wirkung der Matrix

$$T_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -m_x \\ 0 & 1 & -m_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

auf Ortsvektoren \tilde{v} von Punkten in der Ebene $z = 1$. Fügt man die Matrix A in eine 3×3 -Matrix ein, indem man in der rechten unteren Ecke eine 1 hinzufügt, wir bezeichnen diese Matrix mit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit kann man die linke Seite der quadratische Gleichung mit den Vektoren $T_m \tilde{v}$ in der Form

$$(T_m \tilde{v})^t \tilde{A} T_m \tilde{v} = \begin{pmatrix} v - m \\ 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v - m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v - m \\ 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} A(v - m) \\ 1 \end{pmatrix} = (v - m)^t A (v - m) + 1.$$

Der zusätzliche Summand 1, der auf der linken Seite der zweidimensionalen Gleichung nicht vorhanden ist, kann auf beiden Seiten subtrahiert werden. So entsteht die Gleichung

$$(T_m \tilde{v})^t \tilde{A} T_m \tilde{v} = 0. \quad (8)$$

In der Gleichung 8 ist die z -Koordinaten fest auf 1. Da die Gleichung homogen ist, ist sie mit \tilde{v} auch für jedes Vielfache $z\tilde{v}$ erfüllt. Sie beschreibt daher einen Kegel mit der Spitze Nullpunkt.

Eine andere Ausrichtung der Kamera entsteht durch Drehung mit einer orthogonalen Matrix $O \in O(3)$. Das Bild entsteht dann durch Schneiden des gedrehten Kegels mit einer Ebene. Dies Schnittmenge ist aber wieder Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung.

λ_1	λ_2	λ_3	Lösungsmenge
> 0	> 0	> 0	Ellipsoid
> 0	$= \lambda_1$	$= \lambda_1$	Kugel
> 0	$= \lambda_1$	> 0	Rotationsellipsoid
> 0	> 0	< 0	einschaliges Hyperboloid
> 0	$= \lambda_1$	< 0	einschaliges Rotationshyperboloid
> 0	< 0	< 0	zweischaliges Hyperboloid
> 0	< 0	$= \lambda_2$	zweischaliges Rotationshyperboloid
< 0	< 0	< 0	leer

Tabelle 1: Lösungsmenge in Abhängigkeit von den Eigenwerten der Matrix A

Satz 3.10 (Projektives Bild). *Das projekte Bild einer Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung ist immer wieder Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung.*

Auch die Überlegungen, die auf den Satz 3.10 geführt haben, sind nicht auf Dimension 2 beschränkt. In Dimension 3 zum Beispiel kann die Lösungsmenge von $(v - m)^t A (v - m) = 1$ durch Verschiebung um m und Diagonalisierung der Matrix A verstanden werden. Für eine reguläre, symmetrische Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_i, i = 1, \dots, 3$, hängt die Gestalt der Lösungsmenge von den Vorzeichen der Eigenwerte ab. Tabelle 1 stellt die verschiedenen Möglichkeiten zusammen. Sie ergeben sich durch Betrachtung von Schnittkurven der Lösungsmenge mit den Koordinatenebenen. Diese Schnittkurven müssen Ellipsen oder Hyperbeln sein, die Halbachsen sind jeweils $1/\sqrt{|\lambda_i|}$.

5 Ellipse durch vorgegebene Punkte

Eine Ellipse besteht aus den Punkten der Ebene, die eine Gleichung der Form

$$(v - m)^t A (v - m) = 1 \quad (9)$$

erfüllen, wobei $v \in \mathbb{R}^2$ der Koordinatenvektor ist, $m \in \mathbb{R}^2$ der Mittelpunkt der Ellipse und A eine symmetrische Matrix. In diesem Abschnitt soll die folgende Aufgabe gelöst werden.

Aufgabe 3.11. *Gegeben sind n Punkte $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$, in der Ebene, man gebe ein Lösungsverfahren an um die Ellipse zu finden, die am besten zu den Punkten passt.*

Gesucht ist eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

mit $a_{12} = a_{21}$ und ein Vektor m . Sie muss so gestaltet sein, dass die Abweichungen, die die Punkte x_i beim Einsetzen ergeben, möglichst klein sind. Multipliziert man die Gleichung (9) aus, erhält man

$$v^t A v - 2v^t A m + m^t A m = 1. \quad (10)$$

Der Term $m^t A m$ ist festgelegt, sobald A und m bekannt sind, man sollte daher nicht versuchen, diesen Term unabhängig von den anderen zu bestimmen. Schreibt man dafür

$m^t A m = c$, dann wird die Gleichung (10) zu

$$v^t A v - 2v^t A m + c = 1.$$

Darin ist c aber keine unabhängige Variable, wir können sie subtrahieren und anschließend durch $1 - c$ dividieren. So erhalten wir

$$v^t \frac{1}{1-c} A v - 2v^t \frac{1}{1-c} A m = 1.$$

Schreiben wir $B = (1/(1-c))A$, wird die Gleichung zu

$$v^t B v - 2v^t B m = 1.$$

Das Produkt $B m$ ist ein Vektor $p = B m$, aus dem m mittels $m = B^{-1} p$ gefunden werden kann. Damit wird die Gleichung zu

$$v^t B v - 2v^t p = 1. \quad (11)$$

In dieser Form bleiben nur noch fünf Variable, nämlich die drei unabhängigen Koeffizienten der symmetrischen Matrix B und die beiden Komponenten von p . In der Gleichung (11) treten sie unabhängig voneinander und linear auf. Ausgeschrieben für den Punkt (x_i, y_i) wird Gleichung (11) zu

$$x_i^2 a_{11} + 2x_i y_i a_{12} + y_i^2 a_{22} - 2x_i p_1 - 2y_i p_2 = 1. \quad (12)$$

Die Matrix für das zu den Gleichungen (12) gehörige lineare Least Squares-Problem ist

$$M = \begin{pmatrix} x_1^2 & 2x_1 y_1 & y_1^2 & -2x_1 & -2y_1 \\ x_2^2 & 2x_2 y_2 & y_2^2 & -2x_2 & -2y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & 2x_n y_n & y_n^2 & -2x_n & -2y_n \end{pmatrix}, \text{ die rechte Seite ist } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Least-Squares-Ansatz findet man jetzt einen Vektor

$$s = (M^t M)^{-1} M^t b.$$

Daraus kann man die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{pmatrix} \text{ und den Vektor } m = B^{-1} \begin{pmatrix} s_4 \\ s_5 \end{pmatrix}$$

ablesen. Zu bestimmen ist weiter noch der Wert von c , dazu berechnet man zunächst

$$u = m^t B m = \frac{1}{1-c} m^t A m = \frac{c}{1-c}$$

und löst anschließend nach c auf:

$$u = \frac{c}{1-c} \Rightarrow u - uc = c \Rightarrow u = c(1+u) \Rightarrow c = \frac{u}{1+u}, \quad 1-c = \frac{1}{1+u}.$$

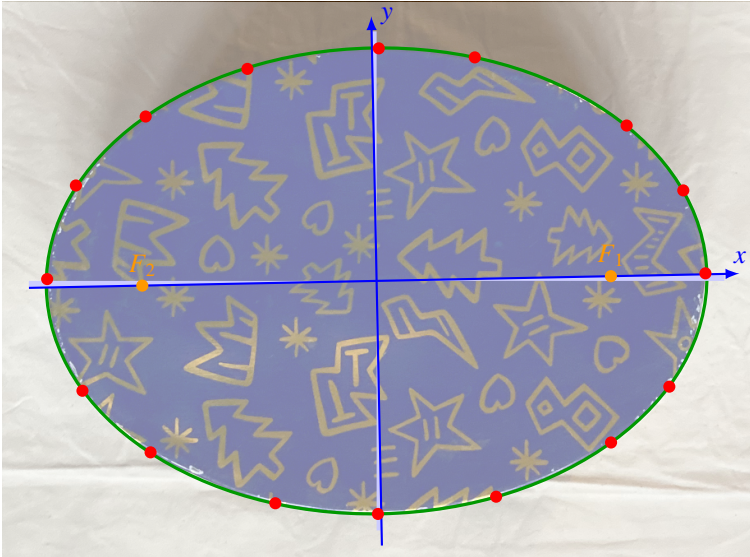


Abbildung 5: Anwendung des Verfahrens von Abschnitt 5 auf die Randpunkte einer elliptischen Gebäckdose.

Damit kann jetzt auch die Matrix

$$A = (1 - c)B = \frac{1}{1 + u}B$$

gefunden werden.

Abbildung 5 zeigt das Resultat der Anwendung dieses Algorithmus auf eine elliptische Dose für Weihnachtsgebäck. Mit Hilfe eines Bildbearbeitungsprogramms wurden die Koordinaten von 16 Punkten (rot) auf dem Rand der Dose ermittelt. Daraus wurden die Parameter der Ellipse (grün) ermittelt. Die Hauptachsen (blau) der Ellipse sind gegenüber den Koordinatenachsen um den kleinen, hellblauen Winkel verdreht.

Das folgende Octave-Programm führt die gesamte Berechnung durch:

```

1 %
2 % loesung.m -- Ellipse durch vorgegebene Punkte
3 %
4 % (c) 2023 Prof Dr Andreas Mueller
5 %
6
7 % Daten aus dem File einlesen
8 punkte = csvread("punkte.csv");
9 n = size(punkte)(1);
10 punkte = punkte(2:n,:);
11 n = size(punkte)(1);

```



```

12 x = punkte(:,1);
13 y = punkte(:,2);
14
15 % Matrix des Least Squares Systems
16 M = zeros(n, 5);
17 M(:,1) = x .* x;
18 M(:,2) = 2 * x .* y;
19 M(:,3) = y .* y;
20 M(:,4) = -2 * x;
21 M(:,5) = -2 * y;
22
23 % rechte Seite besteht aus lauter Einsen
24 b = ones(n, 1);
25
26 % Loesung des least squares Gleichungssystems
27 s = M \ b
28
29 B = [
30     s(1,1), s(2,1);
31     s(2,1), s(3,1)
32 ];
33
34 v = [
35     s(4,1);
36     s(5,1)
37 ];
38
39 % Bestimmung des Mittelpunktes
40 m = inverse(B) * v
41
42 % Berechnung von c
43 u = m' * B * m;
44 c = u / (1 + u)
45
46 % Berechnung der Matrix A
47 A = (1-c)*B
48
49 % Die Halbachsen sind die Eigenwerte der Quadratwurzel
50 % der invertierten Matrix
51 [V, lambda] = eig(A)
52 halbachsen = sqrt(inverse(lambda))

```

Für die sechzehn Punkte auf dem Rand der elliptischen Dose von Abbildung 5 mit den Koordinaten von Tabelle 2 findet das Programm die Lösung:

$$m = \begin{pmatrix} 456.37 \\ 340.20 \end{pmatrix}, \quad c = 2.7658, \quad A = \begin{pmatrix} 6.1733 & 0.12647 \\ 0.12647 & 12.449 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6}$$

mit den Halbachsen $a = 402.56$ und $b = 283.40$, gemessen in Pixeln. Die Ellipse ist gegenüber den Achsen nur wenig verdreht (nur etwas mehr als ein Grad), so dass die

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
x_i	55	458	459	857	181	175	761	742	90	299	576	830	813	602	333	98
y_i	338	624	57	331	549	140	151	537	224	82	68	230	469	603	611	474

Tabelle 2: Koordinaten der sechzehn roten Punkte auf dem Rand der elliptischen Gebäckdose von Abbildung 5.

Diagonalelemente der Matrix A sehr nahe bei $1/a^2 = 6.17 \cdot 10^{-6}$ und $1/b^2 = 12.45 \cdot 10^{-6}$ sind. Diese Daten wurden für die Darstellung der Ellipse in Abbildung 5 verwendet.