Nullstellen von Polynomen

Ergänzung zum Kapitel 11 Eigenwerte und Eigenvektoren

Dies ist ein Ergänzungsartikel zum Buch *Lineare Algebra: Eine anwendungsorientierte Einführung*, von Andreas Müller. Erschienen im Verlag Springer-Vieweg, ISBN 978-3-662-67865-7 und ISBN 978-3-662-67866-4 (eBook).

https://doi.org/10.1007/978-3-662-67866-4

Website zum Buch: https://linalg.ch

Springer-Link: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-67866-4

Nullstellen von Polynomen

Andreas Müller

Zusammenfassung

In Kapitel 5 wurde zwar gezeigt, wie sich mit einer bekannten Nullstelle eines Polynoms der Grad durch Division reduzieren lässt, wie aber diese Nullstellen numerisch gefunden werden können, blieb offen. Algorithmen zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren eröffnen eine interessante Möglichkeit, die Nullstellen zu berechnen.

1 Nullstellen und Eigenwerte

Der in Abschnitt 11.2.4 formulierte Algorithmus zur Berechnung der Eigenwerte geht davon aus, dass erst die Eigenwerte als Nullstellen des charakteristischen Polynomes berechnet werden müssen, anschließend können die Eigenvektoren mit dem Gauß-Algorithmus gefunden werden. Computerprogramme zur Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren gehen aber immer anders vor. Im Jacobi-Transformationsalgorithmus von Abschnitt 11.5.2 für symmetrische Matrizen A wird eine Drehmatrix O so konstruiert, dass die Matrix OAO^t diagonal wird. Die Eigenwerte können dann auf der Diagonalen abgelesen werden. Die Potenzmethode von Abschnitt 11.5.1 bestimmt sogar nur den Eigenvektor v zum betragsgrößten Eigenwert, der Eigenwert muss dann durch Vergleich von Av mit v ermittelt werden.

Über die Jahre sind leistungsfähige Algorithmen entwickelt worden, die effizient die Eigenwerte und Eigenvektoren auch grosser Matrizen berechnen können. Wenn man zu einem Polynom $p(X)$ eine Matrix A_p finden kann, die $p(X)$ als charakteristisches Polynom hat, dann kann man die Nullstellen von $p(X)$ als Eigenwerte der Matrix A_p finden. Eigenschaften des charakteristischen Polynoms, die die direkte Bestimmung der Eigenwerte erschweren, müssen sich nicht unbedingt auch negativ auf die Qualität der Eigenwertbestimmung auswirken.

Negativ ist natürlich, dass zu einem Polynome $p(X)$ vom Grad $\deg p(X) = n$ eine $n \times n$-Matrix A_p konstruiert werden muss. Der Eigenwertalgorithmus operiert dann auf $O(n^2)$ Zahlen, um die Eigenvektoren zu finden, die am Ende doch nicht gebraucht werden. Die Verwendung eines Eigenwertalgorithmus zur Bestimmung der Nullstellen geht also vergleichsweise verschwenderisch mit Speicherplatz und Rechenzeit um.

2 Die Matrix A_p

In Abschnitt 11.B.2 wurde gezeigt, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

das charakteristische Polynom

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) = (-1)^n p(\lambda)$$

hat. Insbesondere hat die Matrix A die Nullstellen des Polynoms $p(\lambda)$ als Eigenwerte. Die folgende Definition verallgemeinert die Matrix noch etwas.

Definition 3.1. *Sei*

$$p(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \Bbbk[X]$$

ein Polynom vom Grad n mit den reellen oder komplexen Koeffizienten. Dann setzen wir

$$A_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & -\frac{a_3}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-3}}{a_n} & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}.$$

Aus Konstruktion ist klar, dass das charakteristische Polynom von A_p ein Vielfaches des Polynoms $p(X)$ ist. Insbesondere können die Nullstellen von $p(X)$ als die Eigenwerte der Matrix A_p bestimmt werden.

3 Der Fall $n = 2$

Zu einem quadratischen Polynom

$$p(X) = aX^2 + bX + c$$

gehört die Matrix

$$A_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}.$$

Für das Polynom $p(X) = X^2 + \varepsilon$ wird die Matrix zu

$$A_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Nullstellen von $p(X)$ sind $\pm\sqrt{-\varepsilon}$, für kleine Werte von ε ändern sich die beiden Nullstellen also sehr schnell. Trotzdem ist der Eigenwertalgorithmus von Octave in der Lage, die beiden Eigenwerte zu finden. Für $\varepsilon = 10^{-40}$ gibt Octave

```
octave:11> A=[0,1;10^(-40),0]
A =

        0   1.0000
   0.0000        0

octave:12> eig(A)
ans =

   1.0000e-20
  -1.0000e-20
```

Die Nullstellen sind also $\pm 10^{-20}$.

4 Ein kubisches Polynom

Das Polynom

$$p(X) = (X - 0.1)^2(X + 0.1) = X^3 - 0.1X^2 - 0.02X + 0.001$$

hat eine doppelte Nullstelle bei 0.1 und eine einfache bei -0.1. Die Koeffizienten sind so gewählt, weil sie sich als Gleitkommazahlen nicht exakt darstellen lassen.

Das Polynom $p_\varepsilon(X) = p(X) + \varepsilon$ hat nur noch eine reelle Nullstelle für $\varepsilon > 0$, die doppelte Nullstelle bei $X = 1$ spaltet sich in zwei konjugiert komplexe Nullstellen auf. Für $\varepsilon < 0$ dagegen, werden daraus zwei reelle Nullstellen.

Die zugehörige Matrix ist

$$A_{p_\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.001 - \varepsilon & 0.01 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Trotz der Schwierigkeit, die Koeffzienten exakt darzustellen, findet der Eigenwertalgorithmus von Octave die korrekten Nullstellen auf mindestens acht Nachkommastellen genau:

```
octave:13> A
A =

                                  0    1.000000000000000                         0
```

```
                 0                    0   1.000000000000000
  -0.001000000000000   0.010000000000000   0.100000000000000

octave:14> eig(A)
ans =

   0.100000000000000 + 0.000000002987088i
   0.100000000000000 - 0.000000002987088i
  -0.100000000000000 +                 0i
```

5 Die Wilkinson-Polynome

Die Wilkinson-Polynome [1] sind Beispiele von reellen Polynomen, die James H. Wilkinson 1963 verwendet hat, um die Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Nullstellen zu illustrieren. Bereits das Beispiel $p(X) = X^2 + \varepsilon$ hat gezeigt, dass eine Veränderung von ε zu einer sehr viel größeren Veränderung der Nullstellen führt. Die Nullstellen hängen empfindlich von den Koeffizienten des Polynoms ab.

5.1 Das erste Wilkinson-Polynom

Das erste Wilkinson-Polynom zeigt, dass die Nullstellen eines Polynoms selbst dann sehr empfindlich von den Koeffizienten abhängen können, wenn die Nullstellen weit auseinander liegen. Das Polynom ist

$$w_n(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - i),$$

oder im von Wilkinson untersuchten Fall $n = 20$ ausgeschrieben

$$\begin{aligned}
w_{20}(X) = X^{20} &- 210X^{19} + 20615X^{18} - 1256850X^{17} + 53327946X^{16} - 1672280820X^{15} \\
&+ 40171771630X^{14} - 756111184500X^{13} + 11310276995381X^{12} \\
&- 135585182899530X^{11} + 1307535010540395X^{10} - 10142299865511450X^{9} \\
&+ 63030812099294896X^{8} - 311333643161390640X^{7} \\
&+ 1206647803780373360X^{6} - 3599979517947607200X^{5} \\
&+ 8037811822645051776X^{4} - 12870931245150988800X^{3} \\
&+ 13803759753640704000X^{2} - 8752948036761600000X \\
&+ 2432902008176640000.
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten des Polynoms sind so groß, dass nicht alle als Gleitkommazahlen exakt dargestellt werden können. Rundungsfehler in den Koeffizienten sind also unvermeidlich.

Für kleine Werte von n können die Koeffizienten des Polynoms p_n exakt dargestellt werden und die vom Eigenwertalgorithmus gefundenen Nullstellen sind recht genau. Im

Fall $n = 10$ ergibt sich zum Beispiel

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \underline{0.99999999999}99120 & x_6 &= \underline{5.9999999999}684892 \\
x_2 &= \underline{2.00000000000}12577 & x_7 &= \underline{6.99999999999}35554 \\
x_3 &= \underline{2.99999999999}52989 & x_8 &= \underline{8.0000000000}145981 \\
x_4 &= \underline{3.99999999999}99591 & x_9 &= \underline{9.0000000000}136282 \\
x_5 &= \underline{5.0000000000}253282 & x_{10} &= \underline{9.9999999999}879563,
\end{aligned}
$$

die bei entsprechender Rundung korrekten Stellen sind unterstrichen. Für $n = 20$ sind die Resultate dagegen nicht mehr brauchbar:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \underline{1.000000000000}4954 & x_{11} &= \underline{10.9}806392847643348 \\
x_2 &= \underline{2.0000000000}094138 & x_{12} &= \underline{12.0}398223812387677 \\
x_3 &= \underline{2.999999999}2317421 & x_{13} &= \underline{12.9}430131296847417 \\
x_4 &= \underline{4.0000000}195252685 & x_{14} &= \underline{14.0}635854810962204 \\
x_5 &= \underline{4.999999}6327515426 & x_{15} &= \underline{14.9}473037050447424 \\
x_6 &= \underline{6.00000}53883384501 & x_{16} &= \underline{16.0}293435796015338 \\
x_7 &= \underline{6.9999}438289759057 & x_{17} &= \underline{16.9}879609211809104 \\
x_8 &= \underline{8.000}4045050641697 & x_{18} &= \underline{18.00}29047491995868 \\
x_9 &= \underline{8.99}79668918340163 & x_{19} &= \underline{18.999}6417997611289 \\
x_{10} &= \underline{10.00}74557119662639 & x_{20} &= \underline{20.00000}89907309508
\end{aligned}
$$

Bei einzelnen Nullstellen ist die Genauigkeit nur noch wenige Stellen.

5.2 Das zweite Wilkinson-Polynom

Das zweite Wilkinson-Polynom untersucht, was passiert, wenn die Nullstellen sehr nahe beeinander liegen. Das Polynom ist

$$v_n(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - 2^{-i}).$$

Die Nullstellen sind die negativen Zweierpotenzen, sie bilden eine geometrische Folge, die sich beim Nullpunkt häuft.

Die Analyse von Wilkinson, zu der man einige Information in [1] finden kann, hat gezeigt, dass die bei dieser Anordnung der Nullstellen keine Stabiltätsproblem auftreten. Die Tabelle 1 zeigt, dass der Eigenwertalgorithmus tatsächlich die Nullstellen mit hoher Genauigkeit finden kann.

Literatur

[1] *Wilkinson's polynomial*. Nov. 2022. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Wilkinson%27s_polynomial.

i	x_i	$\lvert x_i - 2^{-i} \rvert$
1	0.50000000000000044409	0.00000000000000044409
2	0.25000000000000061062	0.00000000000000061062
3	0.12499999999999931999	0.00000000000000068001
4	0.06250000000000034694	0.00000000000000034694
5	0.03124999999999984041	0.00000000000000015959
6	0.01562499999999989765	0.00000000000000010235
7	0.00781250000000014225	0.00000000000000014225
8	0.00390624999999991326	0.00000000000000008674
9	0.00195312500000003903	0.00000000000000003903
10	0.00097656249999999588	0.00000000000000000412
11	0.00048828124999999436	0.00000000000000000564
12	0.00024414062500000781	0.00000000000000000781
13	0.00012207031250000645	0.00000000000000000645
14	0.00006103515624992937	0.00000000000000007063
15	0.00003051757812511479	0.00000000000000011479
16	0.00001525878906255817	0.00000000000000005817
17	0.00000762939453087008	0.00000000000000037992
18	0.00000381469726598984	0.00000000000000036484
19	0.00000190734863274380	0.00000000000000006870
20	0.00000095367431637921	0.00000000000000002704

Tabelle 1: Nullstellen des zweiten Wilkinson-Polynoms $v_{20}(X)$ berechnet mit dem Eigenwertalgorithmus von Octave. Die Nullstellen werden ungefähr mit Maschinengenauigkeit gefunden