Hyperbolische Funktionen

Ergänzung zum Kapitel 9 Transformationen

Dies ist ein Ergänzungsartikel zum Buch *Lineare Algebra: Eine anwendungsorientierte Einführung*, von Andreas Müller. Erschienen im Verlag Springer-Vieweg, ISBN 978-3-662-67865-7 und ISBN 978-3-662-67866-4 (eBook).

https://doi.org/10.1007/978-3-662-67866-4

Website zum Buch: https://linalg.ch

Springer-Link: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-67866-4

Hyperbolische Funktionen

Andreas Müller

Zusammenfassung

In Kapitel 9 wurde gezeigt, wie Drehmatrizen als Werte der Exponentialreihe für die Matrix tJ entstehen. Lorentz-Transformationen können ähnlich durch eine Potenzreihe gefunden werden, die Matrixelemente sind dann die hyperbolischen Funktionen.

Die trigonometrischen Funktionen treten als Matrixelemente von Drehmatrizen auf, die durch die Bedingung definiert sind, dass sie das Skalarprodukt invariant lassen. In Abschnitt 9.2.2 wurde das hyperbolische Skalarprodukt $\langle\;,\;\rangle_H$ mit Hilfe der Matrix

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

definiert. Es wurde auch gezeigt, dass die Matrizen, die dieses Skalarprodukt invariant lassen, die hyperbolischen Funktionen als Matrixelemente enthalten. In diesem Abschnitt sollen die hyperbolischen Funktionen mit Hilfe der Theorie der Exponentialfunktion genauer analyisiert werden.

1 Differentialgleichung

Wir untersuchen die Gruppe

$$L = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^t H A = H\}$$

der Matrizen, die das hyperbolische Skalarprodukt mit der Matrix H invariant lassen. In Abschnitt 9.2.2 wurden diese Matrizen als Lorentz-Transformationen bezeichnet. Wie die anderen früher untersuchten Matrizengruppen ist auch L eine Lie-Gruppe.

Eine Kurve $\gamma(t)$ in L durch die Einheitsmatrix muss für jeden Parameterwert t die Bedingung $\gamma(t)^t H\gamma(t) = H$ erfüllen, die nach Ableitung zu

$$\dot\gamma(t)^t H\gamma(t) + \gamma(t)^t H\dot\gamma(t) = 0$$

wird. An der Stelle $t = 0$ ist $\gamma(0) = I$ und damit folgt

$$\dot\gamma(0)^t H + H\dot\gamma(0) = 0.$$

Schreiben wir die Matrix $\dot\gamma(0)$ als

$$\dot\gamma(0) = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix},$$

wird die Bedingung zu

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\omega_{11}&\omega_{21}\\\omega_{12}&\omega_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_{11}&\omega_{12}\\\omega_{21}&\omega_{22}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\omega_{11}&-\omega_{21}\\\omega_{12}&-\omega_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\omega_{11}&\omega_{12}\\-\omega_{21}&-\omega_{22}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2\omega_{11}&\omega_{12}-\omega_{21}\\\omega_{12}-\omega_{21}&2\omega_{22}\end{pmatrix}=0.\end{aligned}$$

Daraus kann man ablesen, dass die Diagonalelemente $\omega_{11} = \omega_{22} = 0$ verschwinden müssen. Die Ausserdiagonalelemente erfüllen $\omega_{12} - \omega_{21} = 0$, müssen also gleich sein. Die Matrix $\dot\gamma(0)$ muss also ein Vielfaches

$$\dot\gamma(0)=\begin{pmatrix}0&\omega\\\omega&0\end{pmatrix}=\omega K\quad\text{der Matrix}\quad K=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

sein.

Nach den Ausführungen von Abschnitt 9.4.4 muss die Kurve $\gamma(t)$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\gamma(t)=\omega K\,\gamma(t),\quad\text{und}\quad\gamma(0)=I$$

erfüllen. Ausgeschrieben für die Matrixelemente bedeutet dies, dass

$$\left.\begin{aligned}\dot\gamma_{11}(t)&=\omega\gamma_{21}(t)&\dot\gamma_{12}(t)&=\omega\gamma_{22}(t)\\\dot\gamma_{21}(t)&=\omega\gamma_{11}(t)&\dot\gamma_{22}(t)&=\omega\gamma_{12}(t)\end{aligned}\right\}\quad\text{mit Anfangsbedingung}\quad\left\{\begin{aligned}&\gamma_{11}(0)=\gamma_{22}(0)=1\\&\gamma_{12}(0)=\gamma_{21}(0)=0.\end{aligned}\right.$$

Durch Ableiten der ersten Gleichung links und Einsetzen der zweiten Gleichung darunter ergibt die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot\gamma_{11}(t)=\omega^2\gamma_{11}(t)$$

für $\gamma_{11}(t)$. Aus den Gleichungen der zweiten Spalten kann man analog die Differentialgleichung

$$\ddot\gamma_{22}(t)=\omega^2\gamma_{22}(t)$$

für $\gamma_{22}(t)$ erhalten. Da die Funktionen $\gamma_{11}(t)$ und $\gamma_{22}(t)$ ausserdem die gleichen Anfangsbedingungen erfüllen, kann man schliessen, dass $\gamma_{11}(t) = \gamma_{22}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Ableiten der Gleichung unten links und Einsetzen der Gleichung oben links führt ähnlich auf die Gleichungen

$$\ddot\gamma_{21}(t)=\omega^2\gamma_{21}(t)\quad\text{und}\quad\ddot\gamma_{12}(t)=\omega^2\gamma_{12}(t)$$

mit Anfangsbedingung

$$\dot\gamma_{21}(t)=\dot\gamma_{12}(t)=0.$$

Auch hier kann man wieder schliessen, dass $\gamma_{12}(t) = \gamma_{21}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gelten muss.

Die Matrixelemente einer Lorentz-Transformation erfüllen also die Differentialgleichungen zweiter Ordnung $y'' = \omega^2 y$, die bis auf das negative Vorzeichen der Schwingungsdifferentialgleichung $y'' = -\omega^2 y$ mit Kreisfrequenz ω ähnlich sehen.

2 Exponentialreihe

Die Theorie von Abschnitt 9.4.4 ermöglicht, die Lösung der Matrixdifferentialgleichung als Potenzreihe zu schreiben. Durch eine Variablentransformation kann man immer erreichen, dass $k = 1$ ist. Dann hat die Lösung der Differentialgleichung die Form

$$\gamma(t) = e^{tK} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} K^i. \tag{1}$$

Die Potenzen von K sind einfach zu berechnen, es ist nämlich

$$K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \qquad \Rightarrow \qquad K^i = \begin{cases} K & i \text{ gerade} \\ I & i \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die Reihe **??** zerfällt daher in zwei Summanden für die möglichen Potenzen von K, nämlich

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{2i}}{(2i)!} I + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} K.$$

Die beiden Summen können als Definition für die hyperbolischen Funktionen verwendet werden, also

$$= I \cosh t + K \sinh t$$

mit

$$\cosh t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{2i}}{(2i)!} \qquad \text{und} \qquad \sinh t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!}.$$

Durch eine formale Rechnung mit Potenzreihen kann man sich auch davon überzeugen, dass die so definierten hyperbolischen Funktionen die üblichere Definition

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \qquad \text{und} \qquad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

erfüllen.

3 Additionstheoreme

Aus der Theorie der Exponentialreihe kann man ausserdem folgern, dass die Abbildung $t \mapsto e^{tK}$ ein Homomorphismus der additiven Gruppe $\mathbb{R}$ in die Gruppe L ist. Als Matrizenprodukt ausgedrückt bedeutet dies, dass

$$e^{(t+s)K} = e^{tK} e^{sK}$$

sein muss. Als Matrizen geschrieben ist dies gleichbedeutend mit

$$\begin{pmatrix} \cosh(t+s) & \sinh(t+s) \\ \sinh(t+s) & \cosh(t+s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh s & \sinh s \\ \sinh s & \cosh s \end{pmatrix}$$

oder ausgerechnet

$$= \begin{pmatrix} \cosh t \cosh s + \sinh t \sinh s & \cosh t \sinh s + \sinh t \cosh s \\ \sinh t \cosh s + \cosh t \sinh s & \sinh t \sinh s + \cosh t \cosh s \end{pmatrix}.$$

Die hyperbolischen Funktionen erfüllen daher die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cosh(t + s) &= \cosh t \cosh s + \sinh t \sinh s \\ \sinh(t + s) &= \cosh t \sinh s + \sinh t \cosh s, \end{aligned}$$

die bis auf eine Vorzeichen zu den Additionstheoremen für die trigonometrischen Funktionen analog sind.