Lösungen zu den Übungsaufgaben im Buch *Lineare Algebra: Eine anwendungsorientierte Einführung* von Andreas Müller, ISBN 978-3-662-67865-7, https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-67866-4, Website zum Buch: https://linalg.ch

Kapitel 2: Lineare Gleichungssysteme

2.1. Hat das folgende Gleichungssystem eine Lösung?

$$
\begin{aligned}
3x + 2y &= 5\\
x + 3y &= 4\\
7x + 11y &= 19
\end{aligned}
$$

linalg.ch/gauss/23

Lösung. Wir verwenden das Gauss-Verfahren:

$$
\begin{array}{|cc|c|}\hline x & y & 1\\\hline 3 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 4\\ 7 & 11 & 19\\\hline\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{|cc|c|}\hline x & y & 1\\\hline 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3}\\ 1 & 3 & 4\\ 7 & 11 & 19\\\hline\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{|cc|c|}\hline x & y & 1\\\hline 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3}\\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{7}{3}\\ 0 & \frac{19}{3} & \frac{22}{3}\\\hline\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{|cc|c|}\hline x & y & 1\\\hline 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3}\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & \frac{19}{3} & \frac{22}{3}\\\hline\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{|cc|c|}\hline x & y & 1\\\hline 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3}\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\\hline\end{array}
$$

Die letzte Zeile entspricht der Gleichung $0 = 1$, es kann also keine Lösungen geben. ○

2.2. Der Youtuber MindYourDecisions stellt in seinem Video https://www.youtube.com/watch?v=xVL9qbnHYrc die Aufgabe, im folgenden Diagramm die Fragezeichen durch Zahlen so zu ersetzen, dass alle Gleichungen stimmen:

$$
\begin{array}{ccccc}
\boxed{?} & - & \boxed{?} & = & \boxed{9}\\
+ & & + & & \\
\boxed{?} & - & \boxed{?} & = & \boxed{14}\\
\shortparallel & & \shortparallel & & \\
\boxed{12} & & \boxed{2} & &
\end{array}
$$

linalg.ch/gauss/24

a) Ist dies möglich?

b) Kann man eine Bedingung angeben, die die angegebenen Zahlen erfüllen müssen, damit das Rätsel lösbar wird?

c) Finden Sie die allgemeine Lösung des Problems für alle Quadrupel $b_1, \dots, b_4$ von Zahlen, die die in b) gefundene Bedingung erfüllen.

linalg.ch/gauss/25

Lösung. a) Wir schreiben x, y, z und t für die Fragezeichen, und erhalten

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{x} & - & \boxed{y} & = & \boxed{9} \\ + & & + & & \\ \boxed{z} & - & \boxed{t} & = & \boxed{14} \\ \parallel & & \parallel & & \\ \boxed{12} & & \boxed{2} & & \end{array}$$

oder als Gleichungssystem geschrieben:

$$\begin{cases} x - y = 9 \\ z - t = 14 \\ x + z = 12 \\ y + t = 2. \end{cases}$$

Die Aufgabe lässt sich jetzt mit dem Gauß-Algorithmus lösen:

x	y	z	t	1
1	−1	0	0	9
0	0	1	−1	14
1	0	1	0	12
0	1	0	1	2

$\rightarrow$

x	y	z	t	1
1	−1	0	0	9
0	0	1	−1	14
0	1	1	0	3
0	1	0	1	2

$\rightarrow$

x	y	z	t	1
1	−1	0	0	9
0	1	1	0	3
0	0	1	−1	14
0	0	−1	1	−1

$\rightarrow$

x	y	z	t	1
1	−1	0	0	9
0	1	1	0	3
0	0	1	−1	14
0	0	0	0	13

Da in der letzten Zeile auf der rechten Seite eine von 0 verschiedene Zahl steht, hat das Gleichungssystem keine Lösung.

b) Das Gleichungssystem hat genau dann eine Lösung, wenn beim "Gaußen" auf der rechten Seite in der letzten Zeile ebenfalls eine 0 entsteht. Da die Zeilen der Matrix linear abhängig sind, erfüllen die Zeilen $z_1, \dots, z_4$ eine Gleichung der Form

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 + \lambda_4 z_4 = 0.$$

Das Gleichungssytem kann nur dann lösbar sein, wenn auch die rechten Seiten diese Bedingung erfüllen. Wir müssen also die Koeffizienten λ_i finden, auch dies kann man mit dem Gauß-Algorithmus

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	1
1	0	1	0	0
−1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	−1	0	1	0

$\rightarrow$

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	1
1	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	1	0	0
0	−1	0	1	0

$\rightarrow$

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	0
0	0	1	1	0

$\rightarrow$

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0

$\rightarrow$

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	1
1	0	0	−1	0
0	1	0	−1	0
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0

Daraus können wir ablesen, dass die Variable λ_4 frei wählbar ist und dass sich die anderen Variablen durch λ_4 ausdrücken lassen als

$$\lambda_1 = \lambda_4, \quad \lambda_2 = \lambda_4, \quad \lambda_3 = -\lambda_4.$$

Wir dürfen willkürlich $\lambda_4 = 1$ wählen.

Mit diesen Koeffizienten muss jetzt auch die Linearkombination

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4 = b_1 + b_2 - b_3 + b_4 = 0$$

der rechten Seiten verschwinden, damit die Gleichung lösbar ist. Die Zahlen aus der Aufgabe haben dagegen

$$\lambda_1 \cdot 9 + \lambda_2 \cdot 14 + \lambda_3 \cdot 12 + \lambda_4 \cdot 2 = 9 + 14 - 12 + 2 = 13 \neq 0,$$

was erneut zeigt, dass die ursprüngliche Aufgabe nicht lösbar ist. Dagegen müsste das Gleichungssystem für die rechten Seiten

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 3, \quad b_3 = 9 \quad \text{und} \quad b_4 = 5 \tag{1}$$

lösbar sein. Tatsächlich liefert der Gauß-Algorithmus die unendlich vielen Lösungen des Gleichungssystems mit der frei wählbaren Variable t:

$$\begin{aligned} x &= 6 - t \\ y &= 5 - t \\ z &= 3 + t \end{aligned}$$

c) Wir lösen das Gleichungssystem mit den rechten Seiten b_i:

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & 1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b_2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & b_3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b_4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & 1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b_3 - b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b_4 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & 1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b_2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & b_4 - b_3 + b_1 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & 1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b_2 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 + b_2 - b_3 + b_4 = 0 \end{array}$$

Die letzte Zeile ist wegen der an $b_1, \ldots, b_4$ gestellten Voraussetzungen eine Nullzeile, wir können sie in der folgenden Rechnung weglassen. Rückwärtseinsetzen ergibt

$$\rightarrow \begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & 1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b_3 - b_1 - b_2 = b_4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b_2 \end{array}$$

→

x	y	z	t	1
1	0	0	1	$b_1 + b_4$
0	1	0	1	$b_3 - b_1 - b_2 = b_4$
0	0	1	−1	b_2

.

Daraus liest man ab, dass t eine frei wählbare Variable ist und dass sich die anderen Variablen durch die b_i und t ausdrücken lassen als

$$\begin{aligned} x &= b_1 + b_4 - t \\ y &= b_4 - t \\ z &= b_2 + t. \end{aligned}$$

Das Beispiel aus der Lösung von Teilaufgabe b) ergibt sich daraus als Spezialfall (1). ○

2.3. Finden Sie die reduzierte Zeilenstufenform des Tableaus

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	1
3	−3	−3	−12	−9	0	−42
−5	7	3	20	17	4	68
−5	3	7	25	13	−9	92
−5	3	7	20	13	−7	75

.

linalg.ch/gauss/26

Welche Variablen sind frei wählbar?

Lösung. Wir verwenden den Gauss-Algorithmus ohne Spaltenvertauschungen:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	1
3	−3	−3	−12	−9	0	−42
−5	7	3	20	17	4	68
−5	3	7	25	13	−9	92
−5	3	7	20	13	−7	75

→

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	1
1	−1	−1	−4	−3	0	−14
0	2	−2	0	2	4	−2
0	−2	2	5	−2	−9	22
0	−2	2	0	−2	−7	5

→

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	1
1	−1	−1	−4	−3	0	−14
0	1	−1	0	1	2	−1
0	0	0	5	0	−5	20
0	0	0	0	0	−3	3

→

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	1
1	−1	−1	−4	−3	0	−14
0	1	−1	0	1	2	−1
0	0	0	1	0	−1	4
0	0	0	0	0	−3	3

→

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	1
1	−1	−1	−4	−3	0	−14
0	1	−1	0	1	2	−1
0	0	0	1	0	−1	4
0	0	0	0	0	1	−1

→

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	1
1	−1	−1	−4	−3	0	−14
0	1	−1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	3
0	0	0	0	0	1	−1

→

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	1
1	−1	−1	0	−3	0	−2
0	1	−1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	3
0	0	0	0	0	1	−1

→

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	1
1	0	−2	0	−2	0	−1
0	1	−1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	3
0	0	0	0	0	1	−1

Die Pivot-Positionen sind durch rote Einsen hervorgehoben. Die Spalten der Variablen x_3 und x_5 enthalten keine solchen Pivot-Einsen, sie sind die frei wählbaren Variablen. ○

2.4. Verwenden sie den `rref`-Befehl eines Taschenrechners oder einer Software wie Matlab oder Octave, um das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 7x + 3y + 2z &= 2 \\ x + y + z &= 7 \\ 13x + 5y + 3z &= -3 \end{aligned}$$

linalg.ch/gauss/27

zu lösen.

a) Wie viele Lösungen hat dieses Gleichungssystem?

b) Geben Sie die Lösungsmenge an.

Lösung. a) Übergeben wir dem `rref`-Befehl des Taschenrechners das Gleichungssystem als Gauss-Tableau, erhalten wir folgendes Tableau als Resultat.

x	y	z	1
7	3	2	2
1	1	1	7
13	5	3	−3

→

x	y	z	1
1	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{19}{4}$
0	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{47}{4}$
0	0	0	0

Das resultierende Gauss-Tableau enthält eine Nullzeile, womit wir im singulären Fall sind. Da auf der rechten Seite 0 steht, entspricht dies der Gleichung $0 = 0$, welche immer erfüllt ist. Folglich gibt es unendlich viele Lösungen.

b) Die Lösungsmenge kann aus den ersten beiden Zeilen des Schlusstableau abgelesen werden. Die Variable z ist frei wählbar, die Lösung kann also durch z ausgedrück werden. Die entsprechenden Gleichungen dazu sind

$$x - \frac{1}{4}z = -\frac{19}{4} \qquad \text{und} \qquad y + \frac{5}{4}z = \frac{47}{4}.$$

Durch Auflösen nach den Variablen x bzw. y erhalten wir

$$x = -\frac{19}{4} + \frac{1}{4}z \qquad \text{und} \qquad y = \frac{47}{4} - \frac{5}{4}z$$

oder als Menge

$$\mathbb{L} = \left\{ (x, y, z) = \left(-\frac{19}{4} + \frac{1}{4}z, \frac{47}{4} - \frac{5}{4}z, z \right) \,\middle|\, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

○

2.5. Es gibt zwei Werte des Parameters $k \in \mathbb{Q}$, für die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} kx_1 + 5kx_2 + kx_3 &= k(l + 1) \\ 3x_1 + 17x_2 - 7x_3 &= 0 \\ 1x_1 + 7x_2 + 2k - 12x_3 &= l \end{aligned}$$

singulär ist.

a) Finden Sie die beiden Werte von k.

b) Für beide Werte von k bestimmen Sie jeweils die Werte von l, für die das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

Lösung. Wir lösen das Gleichungssystem mit dem Gauss-Algorithmus. Dabei stellen wir fest, dass die erste Zeile zu einer Nullzeile wird, wenn $k = 0$ ist. Das Gauss-Tableau wird in diesem Fall

$$
\begin{array}{|ccc|c|}
\hline
x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 17 & -7 & 0 \\
1 & 7 & -12 & l \\
\hline
\end{array}
\to
\begin{array}{|ccc|c|}
\hline
x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\
\hline
1 & 7 & -12 & l \\
3 & 17 & -7 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
\to
\begin{array}{|ccc|c|}
\hline
x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\
\hline
1 & 7 & -12 & l \\
0 & -4 & 29 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}.
$$

Insbesondere sieht man, dass der Wert von l keinen Einfluss darauf hat, ob das Gleichungssystem in diesem Fall unendlich viele oder gar keine Lösung hat. In diesem Fall ist also $l \in \mathbb{R}$.

Für $k \neq 0$ dürfen wir den Gauss-Algorithmus wie gewohnt durchführen und erhalten

$$
\begin{array}{|ccc|c|}
\hline
x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\
\hline
k & 5k & k & k(l+1) \\
3 & 17 & -7 & 0 \\
1 & 7 & 2k-12 & l \\
\hline
\end{array}
\to
\begin{array}{|ccc|c|}
\hline
x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\
\hline
1 & 5 & 1 & l+1 \\
0 & 2 & -10 & -3l-3 \\
0 & 2 & 2k-13 & -1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\to
\begin{array}{|ccc|c|}
\hline
x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\
\hline
1 & 5 & 1 & l+1 \\
0 & 1 & -5 & -\frac{3}{2}(l+1) \\
0 & 0 & 2k-3 & 3l+2 \\
\hline
\end{array}.
$$

Damit das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat, muss eine Nullzeile entstehen, also $2k - 3 = 0$ und $3l + 2 = 0$, was auf $k = \frac{3}{2}$ und $l = -\frac{2}{3}$ führt.

Zusammengefasst:

a) $k \in \{0, \frac{3}{2}\}$.

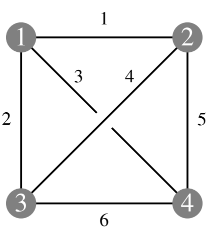
b) Falls $k = 0$ kann $l \in \mathbb{R}$ beliebig sein. Falls $k = \frac{3}{2}$ muss $l = -\frac{2}{3}$ sein. ○

Diskussion. Man kann die beiden Werte von k, für die die Koeffizientenmatrix singulär wird, natürlich auch mit der Determinanten finden. Sie ist

$$
\det(A) = \begin{vmatrix} k & 5k & k \\ 3 & 17 & -7 \\ 1 & 7 & 2k-12 \end{vmatrix} = 4k^2 - 6k = 2k(2k-3).
$$

Die Determinante verschwindet also genau für $k = 0$ und $k = \frac{3}{2}$. Es bleibt, wie vorhin die Werte von l mit dem Gauss-Algorithmus zu bestimmen.

2.6. Finden Sie für das Netzwerk



linalg.ch/gauss/28

eine maximale Menge linear unabhängiger Zyklen.

Lösung. Das Tableau zur Bestimmung einer linear unabhängigen Menge von Zyklen in diesem Netzwerk ist

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	1
-1	-1	-1	0	0	0	0
1	0	0	-1	-1	0	0
0	1	0	1	0	-1	0
0	0	1	0	1	1	0

Der Gauss-Algorithmus liefert das folgende Schlusstableau

→

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	1
1	1	1	0	0	0	0
0	-1	-1	-1	-1	0	0
0	1	0	1	0	-1	0
0	0	1	0	1	1	0

→

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	1
1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0
0	0	-1	0	-1	-1	0
0	0	1	0	1	1	0

→

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	1
1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0

→

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	1
1	1	0	0	-1	-1	0
0	1	0	1	0	-1	0
0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0

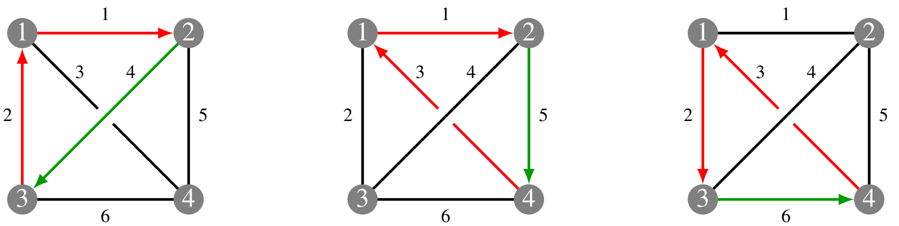
→

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	1
1	0	0	-1	-1	0	0
0	1	0	1	0	-1	0
0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0

Die frei wählbaren Variablen x_4, x_5 und x_6 entsprechen den Kanten 4, 5 und 6, man kann sie auf 1 oder -1 setzen, je nachdem in welcher Richtung die Kante im entsprechenden Zyklus durchlaufen werden soll. Daraus liest man ab, dass drei Zyklen gebildet werden, die dadurch bestimmt sind, ob man die Kanten 4, 5 oder 6 im Zyklus drin haben will oder nicht. Die Zyklen haben die Variablenwerte

	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
Z_4	1	1	0	1	0	0
Z_5	-1	0	1	0	1	0
Z_6	0	-1	-1	0	0	1

Also Pfade im Netzwerk sind die Zyklen:



○