

Lösungen zu den Übungsaufgaben im Buch *Lineare Algebra: Eine anwendungsorientierte Einführung* von Andreas Müller, ISBN 978-3-662-67865-7, <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-67866-4>, Website zum Buch: <https://linalg.ch>

Kapitel 3: Matrizen und Vektoren

3.1. Berechnen Sie die folgenden Matrizenprodukte

a) $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, berechnen Sie alle Potenzen J^2, J^3, J^4, \dots von J .

b) $D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, berechnen Sie $D_\alpha D_\beta$.

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, berechnen Sie alle Potenzen von A^2, A^3, \dots von A .

Lösung. a) Wir berechnen die ersten paar Potenzen:

$$\begin{aligned} J^2 &= J \cdot J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I \\ J^3 &= J^2 \cdot J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -J \\ J^4 &= J^2 \cdot J^2 = (-I)(-I) = I. \end{aligned}$$

Daraus kann man ablesen, dass

$$J^k = \begin{cases} I & \text{für } k \equiv 0 \pmod{4} \\ J & \text{für } k \equiv 1 \pmod{4} \\ -I & \text{für } k \equiv 2 \pmod{4} \\ -J & \text{für } k \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

b) Das Produkt

$$\begin{aligned} D_\alpha D_\beta &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Anwendung der Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen ergibt

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} = D_{\alpha+\beta}.$$

Es wird sich später zeigen, dass die Matrix D_α eine Drehung der Ebene um den Winkel α beschreibt. Die Produktformel drückt aus, dass Drehwinkel addiert werden.

c) Die ersten Potenzen sind

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt also $A^2 = A^{-1}$ und

$$A^k = \begin{cases} I & \text{für } k \equiv 0 \pmod{3} \\ A & \text{für } k \equiv 1 \pmod{3} \\ A^2 = A^{-1} & \text{für } k \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases} \quad \circ$$

Auch die Matrix A wird sich später als Drehmatrix herausstellen. Aus $A^3 = I$ kann man schliessen, dass der Drehwinkel 120° oder 240° sein muss.

3.2. Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 1 \end{pmatrix},$$

Finden Sie eine Matrix B mit der Eigenschaft $AB = A - B$.

Lösung. Wir formen die Gleichung zunächst um und schaffen alle Terme mit B auf die linke Seite

$$AB = A - B$$

$$(A + I)B = A$$

und lösen dann nach B auf

$$B = (A + I)^{-1}A.$$

Zur Berechnung von B brauchen wir also die inverse Matrix von $A + I$, wir können sie mit dem Gauss-Algorithmus finden:

$$\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{2} & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{9} & 2 & 0 & 1 & 0 & \textcircled{1} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \textcircled{-7} & -\frac{9}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{9}{14} & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{2}{14} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{14} & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$



linalg.ch/gauss/33

Die inverse Matrix ist also

$$(A + I)^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$$

Was wir auch noch durch Ausmultiplizieren überprüfen können:

$$(A + I)^{-1}(A + I) = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -2 \cdot 2 + 2 \cdot 9 & -2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \\ 9 \cdot 2 + (-2) \cdot 9 & 9 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} = I.$$

Damit können wir jetzt auch die Matrix B bestimmen:

$$B = (A + I)^{-1}A = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + 2 \cdot 9 & -2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 9 \cdot 1 + (-2) \cdot 9 & 9 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 16 & -2 \\ -9 & 16 \end{pmatrix}$$

Wir prüfen das Resultat, indem wir AB ausrechnen

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 16 & -2 \\ -9 & 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -2 & 30 \\ 135 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 14 - 16 & 28 - (-2) \\ 126 - (-9) & 14 - 16 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 16 & -2 \\ -9 & 16 \end{pmatrix} = A - B. \end{aligned}$$

Damit ist verifiziert, dass tatsächlich $AB = A - B$ gilt. ○

3.3. Das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 4 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{hat den Vektor} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



als Lösung. Finden Sie die Lösungsmenge in Vektorform.

Lösung. Man könnte natürlich die rechte Seite als Produkt Ax berechnen und damit dann das Gleichungssystem lösen. Es ist allerdings einfacher zu beachten, dass die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems immer zusammensetzt aus einer partikulären Lösung, für die wir x nehmen können, und einer Lösung des zugehörigen homogenen Systems: $\mathbb{L} = x + \mathbb{L}_h$.

Wir berechnen jetzt also \mathbb{L}_h für die Koeffizientenmatrix A . Die reduzierte Zeilenstufenform des homogenen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix A ist

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	0
0	1	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0
0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0

Die Variablen x_3 und x_5 sind frei wählbar. Dann ist die Lösungsmenge des homogenen Systems

$$\mathbb{L}_h = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_5 \\ \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_5 \\ x_3 \\ -x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_3, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

und die Lösungsmenge des inhomogenen Systems

$$\mathbb{L} = x + \mathbb{L}_h = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_3, x_5 \in \mathbb{R} \right\}. \quad \text{○}$$

3.4. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & -5 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P = \begin{pmatrix} -7 & -16 & -8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$



linalg.ch/gauss/35

- Berechnen Sie P^2 .
- Berechnen Sie die Inverse A^{-1} von A .
- Berechnen Sie $P_0 = A^{-1}PA$.
- Warum erklärt c) das Resultat von a)?

Lösung. a) Das Matrizenprodukt ist

$$\begin{aligned} P^2 &= \begin{pmatrix} -7 & -16 & -8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 10 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -16 & -8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 10 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-7) \cdot (-7) + (-16) \cdot 1 + (-8) \cdot 5 & (-7) \cdot (-16) + (-16) \cdot 3 + (-8) \cdot 10 & (-7) \cdot (-8) + (-16) \cdot 1 + (-8) \cdot 6 \\ 1 \cdot (-7) + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 5 & 1 \cdot (-16) + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 10 & 1 \cdot (-8) + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 8 \\ 5 \cdot (-7) + 10 \cdot 1 + 6 \cdot 5 & 5 \cdot (-16) + 10 \cdot 3 + 6 \cdot 10 & 5 \cdot (-8) + 10 \cdot 1 + 6 \cdot 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -7 & -16 & -8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 10 & 6 \end{pmatrix} = P. \end{aligned}$$

Eine Matrix P mit der Eigenschaft $P^2 = P$ heißt eine *Projektionsmatrix*.

b) Die Inverse von A kann mit dem Gauss-Algorithmus berechnet werden:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|ccc|ccc} \hline \textcircled{4} & 9 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -2 & -5 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{|ccc|ccc} \hline 1 & \frac{9}{4} & 2 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \textcircled{\frac{1}{4}} & 1 & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \\ \\ \begin{array}{|ccc|ccc} \hline 1 & \frac{9}{4} & \textcircled{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 4 & 1 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{|ccc|ccc} \hline 1 & \frac{9}{4} & 0 & -\frac{7}{4} & -4 & -2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -3 & -4 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \\ \\ & & \rightarrow & \begin{array}{|ccc|ccc} \hline 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 7 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -3 & -4 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Daraus liest man ab

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 7 \\ -3 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Das Produkt ist

$$\begin{aligned} A^{-1}PA &= \begin{pmatrix} 5 & 5 & 7 \\ -3 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -16 & -8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 10 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & -5 & -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 5 & 7 \\ -3 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & -5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P_0, \end{aligned}$$

d) P_0 ist wegen $P_0^2 = P_0$ ganz offensichtlich eine Projektionsmatrix. Es folgt

$$P = AP_0A^{-1} \Rightarrow P^2 = AP_0A^{-1}AP_0A^{-1} = AP_0 \underbrace{(A^{-1}A)}_{=I} P_0A^{-1} = AP_0^2A^{-1} = AP_0A^{-1} = P,$$

was das Resultat von a) erklärt. ○

3.5. Die Formeln

$$y_0 = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$$

$$y_1 = x_2 - x_1$$

$$y_2 = x_3 - x_2$$

$$\vdots$$

$$y_{n-1} = x_n - x_{n-1}$$

beschreiben eine Transformation der Variablen x_1, \dots, x_n in die Variablen y_0, \dots, y_{n-1} .

- Schreiben Sie die Transformation als Produkt von Matrizen und Vektoren.
- Finden Sie die Inverse der Matrix im Falle $n = 5$.
- Können Sie daraus eine Vermutung für die Form der inversen Matrix im allgemeinen Fall ableiten, und eventuell beweisen?

Diese Aufgabenstellung stammt aus einer Ingenieur Anwendung und wurde vorgeschlagen von Tabea Méndez.

Lösung. a) Wir schreiben die Variablen x_i und y_j als Spaltenvektoren x bzw. y . Dann kann man die Transformation in Matrixschreibweise als

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

schreiben. Wir nennen die Matrix in (??) A .

b) Die Inverse der Matrix A kann mit dem Gauss-Algorithmus ermittelt werden.

	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0	0	0	0
	-1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	-1	1	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	-1	1	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	1
→	1	1	1	1	1	5	0	0	0	0
	-1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	-1	1	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	-1	1	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	1
→	1	1	1	1	1	5	0	0	0	0
	0	2	1	1	1	5	1	0	0	0
	0	-1	1	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	-1	1	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	1
→	1	1	1	1	1	5	0	0	0	0
	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0
	0	0	-1	1	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	1
→	1	1	1	1	1	5	0	0	0	0
	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0
	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	1	0
	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	1
→	1	1	1	1	1	5	0	0	0	0
	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0
	0	0	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	0
	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1
→	1	1	1	1	1	5	0	0	0	0
	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0
	0	0	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	0
	0	0	0	0	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$

→	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">4</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{1}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{2}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{3}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{4}{5}$</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{1}{2}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{1}{2}$</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{2}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{1}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{3}{10}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{2}{5}$</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{1}{3}$</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">$\frac{4}{3}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{8}{15}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{8}{15}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{1}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{4}{15}$</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{1}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{2}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{3}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{1}{5}$</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{1}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{2}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{3}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{4}{5}$</td></tr> </table>	1	1	1	1	0	4	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{2}{5}$	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{8}{15}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{15}$	0	0	0	1	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	0	0	1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
1	1	1	1	0	4	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$																																										
0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{2}{5}$																																										
0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{8}{15}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{15}$																																										
0	0	0	1	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$																																										
0	0	0	0	1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$																																										
→	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">3</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{2}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{4}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{6}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{3}{5}$</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{1}{2}$</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">$\frac{3}{2}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{3}{10}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{1}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{2}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{3}{10}$</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{1}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{2}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{1}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{1}{5}$</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{1}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{2}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{3}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{1}{5}$</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{1}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{2}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{3}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{4}{5}$</td></tr> </table>	1	1	1	0	0	3	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{10}$	0	0	1	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	0	1	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	0	0	1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
1	1	1	0	0	3	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{3}{5}$																																										
0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{10}$																																										
0	0	1	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$																																										
0	0	0	1	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$																																										
0	0	0	0	1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$																																										
→	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{3}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{6}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{4}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{2}{5}$</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{1}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{1}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{1}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{1}{5}$</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{1}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{2}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{1}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{1}{5}$</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{1}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{2}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{3}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{1}{5}$</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{1}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{2}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{3}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{4}{5}$</td></tr> </table>	1	1	0	0	0	2	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	1	0	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	1	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	0	1	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	0	0	1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
1	1	0	0	0	2	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{5}$																																										
0	1	0	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$																																										
0	0	1	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$																																										
0	0	0	1	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$																																										
0	0	0	0	1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$																																										
→	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{4}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{3}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{2}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{1}{5}$</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{1}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{1}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{2}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{1}{5}$</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{1}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{2}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{1}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{1}{5}$</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{1}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{2}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{3}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$-\frac{1}{5}$</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{1}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{2}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{3}{5}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\frac{4}{5}$</td></tr> </table>	1	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	1	0	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	1	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	0	1	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	0	0	1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
1	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$																																										
0	1	0	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$																																										
0	0	1	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$																																										
0	0	0	1	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$																																										
0	0	0	0	1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$																																										

Daraus kann man die Inverse ablesen:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

c) Die allgemeine Form könnte wie folgt aussehen:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n-1}{n} & -\frac{n-2}{n} & -\frac{n-3}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} & -\frac{n-2}{n} & -\frac{n-3}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & -\frac{n-3}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \frac{3}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \frac{3}{n} & \dots & \frac{n-1}{n} \end{pmatrix}$$

Die Einträge oberhalb der Diagonalen sind alle negativ, und die Differenz zu den Einträgen unter der Diagonalen ist 1. In der Spalte $k \geq 2$ stehen die Elemente

$$a_{lk} = \begin{cases} -\frac{n-k+1}{n} & \text{für } l < k, \text{ d. h. oberhalb der Diagonalen,} \\ \frac{k-1}{n} & \text{für } l \geq k, \text{ d. h. auf und unterhalb der Diagonalen.} \end{cases}$$

Um zu beweisen, dass dies tatsächlich die Inverse im allgemeinen Fall ist, dass also $A^{-1} = B$ ist, überlegen wir uns das Produkt AB , wir erwarten, dass $AB = I$.

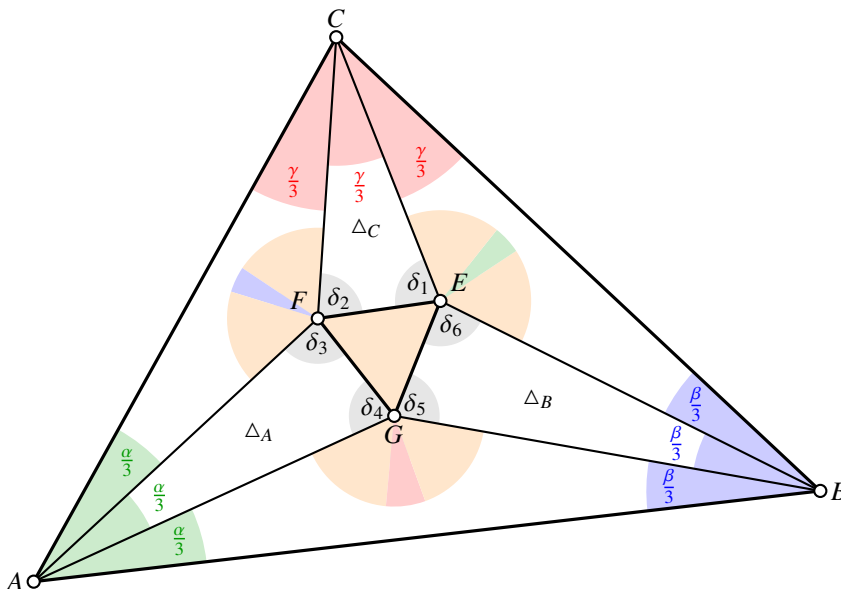
Das Produkt der ersten Zeile von A mit einer Spalte von B ist der Mittelwert der Einträge in dieser Spalte. Für die erste Spalte ergibt das wie gewünscht 0. Für die Spalte k mit $k \geq 2$ müssen wir den Mittelwert der a_{ik} berechnen. Dieser ist

$$\frac{1}{n} \left(-(k-1) \frac{n-k+1}{n} + (n-k+1) \frac{k-1}{n} \right) = 0,$$

also ist die erste Zeile der Produktmatrix korrekt, d. h. die erste Zeile einer Einheitsmatrix.

Die Folgezeilen in A haben jeweils nur zwei Einträge -1 und 1 , das Produkt mit einer Spalte von B ergibt die Differenz der entsprechenden Einträge in der Spalte. Die Differenz ergibt genau dann 1, wenn -1 auf einen negativen Eintrag und 1 auf einen positiven Eintrag der Spalte fällt, und die Differenz ist in diesem Fall 1. In allen anderen Fällen sind die Werte einer Spalte konstant, es ergibt sich keine Differenz. Damit ist nachgewiesen, dass das Matrizenprodukt $AB = I$ ist, also ist $A^{-1} = B$. \circ

3.6. In seinem Video *Morley's Miracle*¹ zeigt der mathematische Video-Blogger *Mathologer* den von John Conway erdachten Beweis des Satzes von Morley: Teilt man in einem beliebigen Dreieck die Winkel mit Geraden durch drei, dann schneiden sich diese Geraden in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks (in der Zeichnung orange):



Mit Hilfe der Winkelsumme kann man schnell einige Beziehungen zwischen den Winkeln ableiten, zum Beispiel

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{3} + \frac{\gamma}{3} = 60^\circ.$$

¹ Youtube: <https://www.youtube.com/watch?v=gjhmh3yWiTI>

Im Dreieck $\triangle ABG$ muss der Winkel bei G den Wert $\frac{\gamma}{3} + 2 \cdot 60^\circ$ haben, in der Abbildung durch die orangen Winkel dargestellt. Entsprechendes gilt auch in den Dreiecken $\triangle BCE$ und $\triangle CAF$.

Man könnte jetzt versuchen, die Winkel δ_i zu berechnen. Beim Timestamp 3:30 erklärt Mathologer, dass man für die Winkel $\delta_i, 1 \leq i \leq 6$, er nennt sie a, b, c, d, e, f , ein lineares Gleichungssystem aufstellen kann. Dazu verwendet er die folgenden Fakten und Annahmen:

1. Die Winkelsumme in den Dreiecken $\triangle_A = \triangle AGF, \triangle_B = \triangle BEG$ und $\triangle_C = \triangle CFE$ ist 180° .
2. Die Summe der Winkel in jedem der drei Punkte ist 360° .
3. Die orangen Winkel sind alle 60° .

Stellen Sie das Gleichungssystem auf und beantworten Sie folgende Fragen.

- a) Ist das so gefundene Gleichungssystem regulär?
- b) Bestimmen Sie den Rang der Koeffizientenmatrix.

Lösung. Der Winkel $\angle AGB$ ist $180^\circ - \frac{\alpha}{3} - \frac{\beta}{3}$, und entsprechend für die Winkel bei E und F . Das Gleichungssystem wird damit

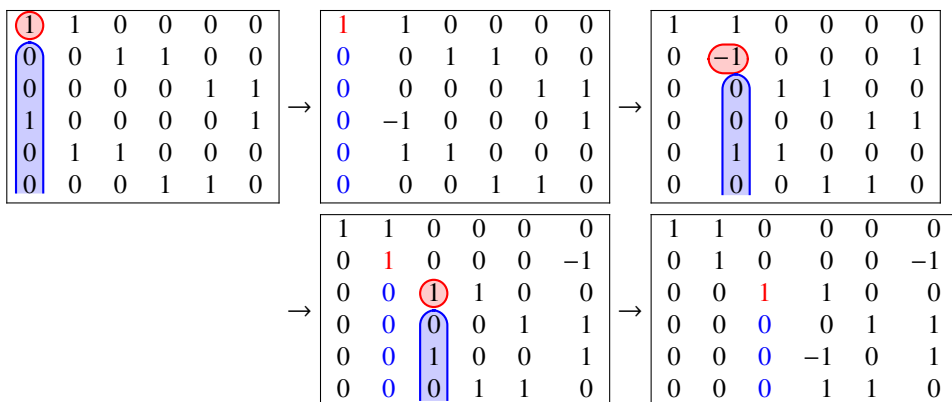
$$\begin{array}{rcl}
 \Delta_A : & \delta_1 + \delta_2 & = 180^\circ - \frac{\alpha}{3} \\
 \Delta_B : & \delta_3 + \delta_4 & = 180^\circ - \frac{\beta}{3} \\
 \Delta_C : & \delta_5 + \delta_6 & = 180^\circ - \frac{\gamma}{3} \\
 E : & \delta_1 + \delta_6 & = 180^\circ - \frac{\alpha}{3} - \frac{\beta}{3} - \frac{\gamma}{3} \\
 F : & \delta_2 + \delta_3 & = 180^\circ - \frac{\alpha}{3} - \frac{\beta}{3} - \frac{\gamma}{3} \\
 G : & \delta_4 + \delta_5 & = 180^\circ - \frac{\alpha}{3} - \frac{\beta}{3}
 \end{array}$$

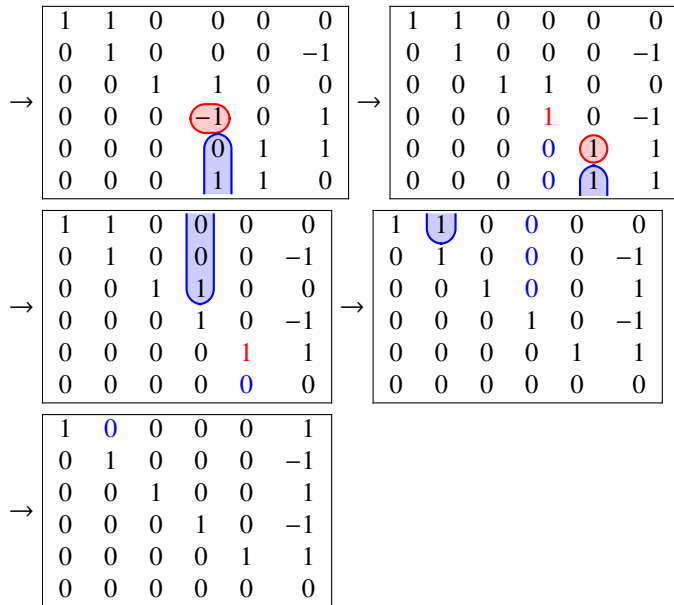
Die rechten Seiten sind nicht weiter wichtig, da wir ja nur die Lösbarkeit des Gleichungssystems untersuchen müssen. Die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems ist

$$\begin{pmatrix}
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
 \end{pmatrix}$$



Wir verwenden daher den Gauss-Algorithmus, um den Rang zu bestimmen:





Daraus kann man ablesen, dass der Rang der Matrix 5 ist, es gibt genau einen frei wählbaren Winkel. Insbesondere ist das Gleichungssystem nicht regulär. ○

3.7. Die Sylvester Gleichung (nach James Joseph Sylvester, 1884) ist die Gleichung

$$AX + XB = C \tag{2}$$

von $n \times n$ -Matrizen. Gesucht ist X zu gegebenen Matrizen A , B und C . Da man für $n > 1$ die Faktoren im Allgemeinen nicht vertauschen darf, ist die Gleichung nicht direkt mit Matrizenalgebra lösbar. Trotzdem ist es natürlich eine lineare Gleichung für Elemente von X . Für den Fall $n = 2$ schreibe man

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

und stelle die linearen Gleichungen für x auf.

Lösung. Auf beiden Seiten der Gleichung (3.44) stehen 2×2 -Matrizen, die Gleichung stellt also vier Gleichungen bereit, die vier Einträge der Matrix X zu bestimmen. Ausmultiplizieren der beiden Matrizenprodukte AX und XB ergibt

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_3 & a_{11}x_2 + a_{12}x_4 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_3 & a_{21}x_2 + a_{22}x_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad XB = \begin{pmatrix} x_1b_{11} + x_2b_{21} & x_1b_{12} + x_2b_{22} \\ x_3b_{11} + x_4b_{21} & x_3b_{12} + x_4b_{22} \end{pmatrix}.$$

Man kann jetzt die Gleichungen als lineares Gleichungssystem für die Variablen x_1, \dots, x_4 aufschreiben:

$$\begin{aligned} (a_{11} + b_{11})x_1 + & b_{21} x_2 + & a_{12} x_3 & & = c_{11} \\ b_{12} x_1 + (a_{11} + b_{22})x_2 & & & + & a_{12} x_4 = c_{12} \\ a_{21} x_1 & & + (a_{22} + b_{11})x_3 + & b_{21} x_4 = c_{21} \\ & a_{21} x_2 + & b_{22} x_3 + (a_{22} + b_{12})x_4 = c_{22} \end{aligned} \tag{4}$$

Die Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems ist

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & b_{21} & a_{21} & 0 \\ b_{12} & a_{11} + b_{22} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} + b_{11} & b_{21} \\ 0 & a_{21} & b_{22} & a_{22} + b_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{21} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & 0 & 0 \\ b_{12} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{21} \\ 0 & 0 & b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a_{11}I & a_{12}I \\ a_{21}I & a_{22}I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B^t & 0 \\ 0 & B^t \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Damit ist die Lösung der Sylvester-Gleichung (3.44) auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit 4 Unbekannten und 4 Gleichungen zurückgeführt.

Um einzusehen, dass die Gleichung ein lineares Gleichungssystem für X ist, könnte man auch wie folgt vorgehen. Die linke Seite ist linear in X , wenn gilt

$$A(X_1 + X_2) + (X_1 + X_2)B = AX_1 + AX_2 + X_1B + X_2B = AX_1 + X_1B + AX_2 + X_2B \\ \text{und} \quad A(\lambda X) + (\lambda X)B = \lambda AX + \lambda XB = \lambda(AX + XB),$$

welche beide aus den Rechenregeln der Matrizenalgebra unmittelbar folgen. \circ

Diskussion. Die Lösung der Sylvester-Gleichung auf diesem Weg ist sehr aufwendig und numerisch auch nicht stabil. Für beliebiges n hat das Gleichungssystem für die Unbekannten x_i nicht weniger als n^2 Unbekannte. Die Lösung mit dem Gauss-Algorithmus braucht dafür $O(n^6)$ Operationen. Es stehen alternative Algorithmen zur Verfügung, die die Sylvester-Gleichung mit Aufwand $O(n^3)$ lösen können.

Die Matrix (??) hat eine sehr spezielle Form. Mit dem sogenannten Kronecker-Produkt kann man sie in der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11}I & a_{12}I \\ a_{21}I & a_{22}I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B^t & 0 \\ 0 & B^t \end{pmatrix} = E_n \otimes A + B^t \otimes E_n$$

schreiben.

Um das Gleichungssystem aufzustellen, wurde X als ein Vektor betrachtet. Schreibt man $\text{vec } X$ für den aus der Matrix X in dieser Art gewonnenen Vektor, dann kann das der Sylvester-Gleichung äquivalente lineare Gleichungssystem (??) kompakt als

$$(E_n \otimes A + B^t \otimes E_n) \text{vec } X = \text{vec } C$$

geschrieben werden.

3.8. Das sogenannte Kepler-Teleskop verwendet zwei Sammellinsen mit verschiedenen Brennweiten wie in Abbildung 3.22 dargestellt. Beide Linsen bestehen aus dem gleichen Material mit Brechungsindex $n = 1.5$. Die Linsen sind zudem symmetrisch (beide Flächen haben den gleichen Krümmungsradius). Der Krümmungsradius der großen Linse ist $r_1 = 1000$, der der kleinen ist $r_2 = 100$. Die große Linse hat Dicke $d_1 = 10$, die kleine $d_2 = 6$.

- Berechnen Sie die Brennweite der beiden Linsen.
- In welchem Abstand müssen die Linsen montiert werden, damit parallel einfallende Lichtstrahlen (rot in Abbildung 3.22) auch wieder parallel aus dem System austreten. Man nennt dies ein *afokales* System. Das Auge kann die parallelen Strahlen auf die Netzhaut fokussieren, der Benutzer sieht ein scharfes Bild.

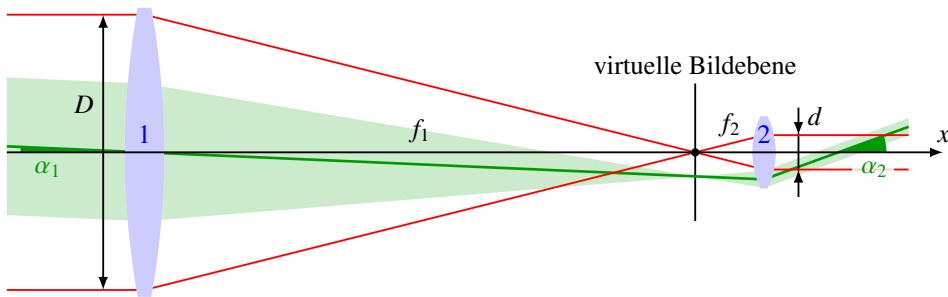


Abbildung 1: Strahlengang in einem einfachen Kepler-Teleskop. Die aus dem unendlichen parallel einfallenden Lichtstrahlen werden vom Objekt (Linse 1) auf eine Ebene im Abstand f_1 gebündelt und erzeugen dort ein virtuelles Bild. Der Beobachter kann mit dem Okular (Linse 2) dieses Bild vergrößert betrachten. In Aufgabe 3.8 wird die Vergrößerung berechnet.

- Vergleichen Sie die Summe der in a) gefundenen Brennweiten mit dem in b) gefundenen Abstand der Linsen.
- Ein Strahlenbündel mit Durchmesser D wird beim Durchgang durch das optische System zu einem Strahlenbündel mit Durchmesser d . d heißt die *Austrittspupille* des Systems mit Öffnung D . Wenn d größer ist als die Pupille des Beobachters, kann das Auge des Beobachters nicht alles Licht nutzen, welches das optische System liefern kann. Berechnen Sie d .
- Mit welchem Winkel α_2 zur optischen Achse tritt ein Lichtstrahl aus, der im Winkel α_1 zur optischen Achse auf der ersten Linse auftrifft? Die zugehörigen Lichtstrahlen sind in Abbildung 3.22 grün dargestellt. Die *Vergrößerung* des optischen Systems ist das Verhältnis der beiden Winkel.
- Vergleichen Sie die in e) gefundene Vergrößerung des Teleskops mit dem Verhältnis der in a) gefundenen Brennweiten.

Lösung. Die einzige Unbekannte ist l , der Abstand zwischen den Linsen. Die Brechung in der Linse i wird durch die Transfermatrizen

$$B(1, n, r_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{r_i}(\frac{1}{n} - 1) & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B(n, 1, -r_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{r_i}(n - 1) & n \end{pmatrix}$$

beschrieben.

Die beiden Flächen einer Linse befinden sich im Abstand d_i , die Entwicklung des Lichtstrahls zwischen den Linsen wird daher beschrieben durch die Matrizen

$$T_{d_i} = \begin{pmatrix} 1 & d_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Transfermatrix T_i der Linse i ist daher das Matrizenprodukt

$$T_i = B(n, 1, -r_i)T_{d_i}B(1, n, r_i). \quad (6)$$

Diese Matrizen sind in allgemeiner Form etwas unhandlich, wir ersetzen daher die bekannten Zahlenwerte für r_i , d_i und n und erhalten mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0.99666\bar{6} & 6.66666\bar{6} \\ -0.000998333\bar{3} & 0.99666\bar{6} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0.98 & 4.0 \\ -0.0099 & 0.98 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Bezeichnen wir den Abstand der Linsen mit l . Die Entwicklung der Lichtstrahlen zwischen den beiden Linsen wird durch T_l beschrieben. Die Transfermatrix des Gesamtsystems ist daher

$$T = T_2 T_l T_1.$$

Die Radien r_i , die Dicke d_i der Linsen und der Brechungsindex n sind bekannt, aber der Abstand der Linsen l ist nicht bekannt. Einsetzen der numerischen Werte liefert

$$T = \begin{pmatrix} 0.97274 - 0.0009783\bar{6} \cdot l & 0.9767\bar{3} \cdot l + 10.52 \\ 0.0000098835 \cdot l - 0.0108453\bar{6} & 0.9107\bar{3} - 0.009867 \cdot l \end{pmatrix}. \quad (8)$$

- a) Die Brennweite f_i der Linse i ist die Entfernung des Punktes auf der optische Achse, in den parallel einfallende Strahlen konzentriert werden. Diese Bedingung kann ausgedrückt werden als

$$T_{f_i} T_i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ? \end{pmatrix}.$$

Setzen wir die Matrizen T_i aus (??) ein, erhalten wir die Bedingungen

$$\begin{aligned} 0.99\bar{6} - 0.000998\bar{3} \cdot f_1 &= 0 & 0.98 - 0.0099 \cdot f_2 &= 0 \\ f_1 &= 998.33 & f_2 &= 98.990. \end{aligned}$$

- b) Der Abstand l muss so bestimmt werden, dass ein eintretender horizontaler Strahl wieder als horizontaler Strahl austritt. Horizontale Strahlen werden durch Vektoren beschrieben, die 0 als zweite Komponente haben. Diese Bedingung kann also formuliert werden also die Gleichung

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T e_1 = \begin{pmatrix} ? \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Bedingung an die erste Komponente des Produktes $T e_1$ ist für die Matrix T aus (??)

$$\begin{aligned} 0.0000098835 \cdot l - 0.0108453\bar{6} &= 0 \\ l &= 1097.3. \end{aligned}$$

- c) Die Summe der Brennweiten ist $f_1 + f_2 = 1097.3 = l$. Ein Kepler-Teleskop erzeugt also ein scharfes Bild für den Beobachter, wenn die Linsen so montiert werden, dass sie einen gemeinsamen Brennpunkt haben.
- d) Für diese Situation gilt die Gleichung

$$T \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad d = -0.10084 \cdot D,$$

das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Strahlen sich kreuzen.

- e) Ein Strahl, der im Winkel α auf das Zentrum der Frontlinse trifft, wird durch den Vektor

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

beschrieben. Das optische System macht daraus den Strahl, der durch

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1082.31 \cdot \alpha \\ -9.91653 \cdot \alpha \end{pmatrix}.$$

Daraus liest man ab, dass der Winkel um den Faktor 9.92 vergrößert wird, das Kepler-Teleskop hat also 9.92-fache Vergrößerung.

f) Das Verhältnis der Brennweiten ist

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{998.33}{98.990} = 10.085.$$

Dies ist ungefähr gleich groß wie die in e) berechnete Vergrößerung. Der Unterschied rührt daher, dass wir die Brennweite von der Oberfläche der Linse gemessen haben, nicht vom sogenannten Hauptpunkt (principal point). ○

3.9. Welchen Wert hat der periodische Kettenbruch $y = [a; a, a, a, a, \dots]$?

Lösung. Der Kettenbruch ist ausgeschrieben

$$\begin{aligned} y &= a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{\dots}}} \\ &= a + \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Der rote Teil des Kettenbruchs ist wieder der Kettenbruch. Durch Multiplikation mit y ergibt sich die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} y^2 &= ay + 1 \\ y^2 - ay - 1 &= 0 \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + 1} = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}.$$

Für $a > 0$ muss $y > 0$ sein, dann kommt von den Lösungen der quadratischen Gleichungen nur die mit dem positiven Zeichen in Frage. Für $a < 0$ muss $y < 0$ sein, dann muss man das negative Zeichen nehmen. Mit der Signum-Funktion

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

kann man die Lösung auch als

$$y = \frac{a + \text{sign}(a) \cdot \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

schreiben. ○

3.10. Berechnen Sie 666^{666} in \mathbb{F}_{13} .

Lösung. Zunächst ist die Basis der Potenz $666 = 3$ in \mathbb{F}_{13} , es muss also nur 3^{666} berechnet werden. Nach dem kleinen Satz von Fermat ist $3^{12} = 1$ in \mathbb{F}_{13} . Wegen $666 = 12 \cdot 50 + 6$ folgt $3^{666} = 3^6 = 729 = 1$ in \mathbb{F}_{13} . \circ

3.11. Die Zahl $p = 47$ ist eine Primzahl, der Ring $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_{47}$ ist daher ein Körper. Jeder von Null verschiedene Rest $b \in \mathbb{F}_p^*$ hat daher eine multiplikative Inverse. Berechnen Sie die multiplikative Inverse von $b = 11 \in \mathbb{F}_{47}$.

Lösung. Der euklidische Algorithmus muss auf die Zahlen $p = 47$ und $b = 11$ angewendet werden, es ergeben sich die Quotienten und Reste der folgenden Tabelle:

k	a_k	b_k	q_k	r_k
0	47	11	4	3
1	11	3	3	2
2	3	2	1	1
3	2	1	2	0

Wie erwartet ist der größte gemeinsame Teiler $\text{ggT}(47, 11) = r_2 = 1$. Um die Zahlen s, t zu finden, für die $sp + tb = 1$ gilt, können wir die Matrixform verwenden, wir berechnen dazu

$$\begin{aligned}
 Q &= Q(2)Q(1)Q(3)Q(4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 13 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 13 \\ 4 & -17 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 4 & -17 \\ -11 & 47 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Daraus kann man ablesen, dass $s = 4$ und $t = -17$, tatsächlich ist $4 \cdot 47 - 17 \cdot 11 = 188 - 187 = 1$. Wir schließen daraus, dass $-17 = 30 \in \mathbb{F}_{47}$ die multiplikative Inverse von $b = 11$ ist. Die Rechnung $11 \cdot 30 = 330 = 7 \cdot 47 + 1$ zeigt, dass dies der Fall ist.

Alternativ zur Matrixdarstellung kann man die Koeffizienten s und t auch mit Hilfe der erweiterten Tabelle finden:

k	a_k	b_k	q_k	r_k	c_k	d_k
					1	0
					0	1
0	47	11	4	3	1	-4
1	11	3	3	2	-3	13
$n = 2$	3	2	1	1	4	-17
3	2	1	2	0	-11	47

Die gesuchten Zahlen s und t sind rot hervorgehoben. \circ

3.12. Im Rahmen der Aufgabe, die Zehntausenderstelle der Zahl 5^{5555} zu berechnen, muss Michael Penn im Video <https://youtu.be/Xg24FinMiw> bei 12:52 zwei Zahlen x und y finden, so dass,

$$5^5 x + 2^5 y = 1$$

ist. Verwenden Sie die Matrixform des euklidischen Algorithmus.

Lösung. Zunächst berechnen wir die beiden Potenzen

$$5^5 = 3125 \quad \text{und} \quad 2^5 = 32.$$

Damit können wir jetzt den Algorithmus durchführen. Die Quotienten und Reste sind

$$\begin{array}{llll} a_0 = q_0 \cdot b_0 + r_0 & 3125 = 97 \cdot 32 + 21 & q_0 = 97 & r_0 = 21 \\ a_1 = q_1 \cdot b_1 + r_1 & 32 = 1 \cdot 21 + 10 & q_1 = 1 & r_1 = 11 \\ a_2 = q_2 \cdot b_2 + r_2 & 21 = 1 \cdot 11 + 10 & q_2 = 1 & r_2 = 10 \\ a_3 = q_3 \cdot b_3 + r_3 & 11 = 1 \cdot 10 + 1 & q_3 = 1 & r_3 = 1 \\ a_4 = q_4 \cdot b_4 + r_4 & 10 = 10 \cdot 1 + 0 & q_4 = 10 & r_4 = 0 \end{array}$$

Daraus kann man jetzt auch die Matrizen $Q(q_k)$ bestimmen und ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -97 \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -97 \\ -1 & 98 \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -195 \\ -3 & 293 \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 293 \\ 32 & -3125 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daraus kann man jetzt ablesen, dass

$$-3 \cdot 3125 + 293 \cdot 32 = -9375 + 9376 = 1.$$

Die gesuchten Zahlen sind also $x = -3$ und $y = 293$.

In der Tabellenform wird der erweiterte euklidische Algorithmus viel übersichtlicher:

k	a_k	b_k	q_k	r_k	s_k	t_k
0	3125	32	97	21	1	-97
1	32	21	1	11	-1	98
2	21	11	1	10	2	-195
$n = 3$	11	10	1	1	-3	293
4	10	1	10	0	32	-3125

Auch hier kann man $s = -3$ und $t = 293$ ablesen.

○

3.13. Der Körper \mathbb{F}_2 ist besonders einfach, da er nur zwei Elemente 0 und 1 enthält.

- a) Bestimmen Sie die Additions- und Multiplikationstabelle für \mathbb{F}_2 .
- b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

über dem Körper \mathbb{F}_2 mit dem Gauss-Algorithmus.

- c) Bestimmen Sie die Inverse $A^{-1} \in GL_2(\mathbb{F}_2)$ der Koeffizientenmatrix A des Gleichungssystems.
- d) Kontrollieren Sie das Resultat durch Ausmultiplizieren des Produktes AA^{-1} .

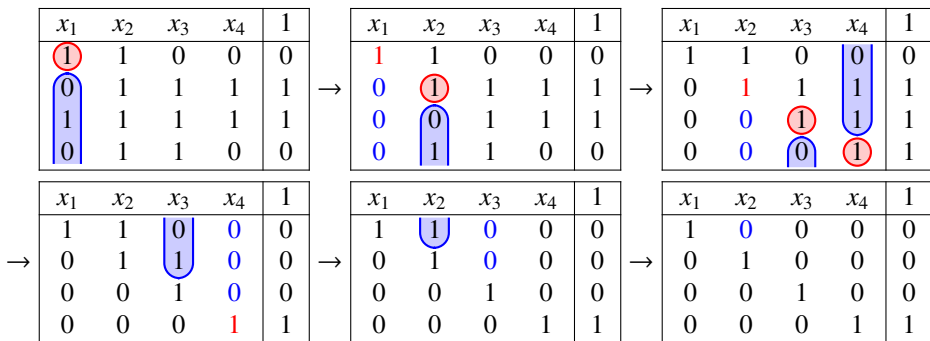
Lösung. a) Die Additions- und Multiplikationstabellen sind

+	0	1
0	0	1
0	1	0

·	0	1
0	0	0
0	0	1

Betrachtet als Bitoperationen entspricht die Addition dem XOR, die Multiplikation dem AND.

b) Die Gauss-Tableaux sind



In der ersten Zeile stehen die Schritte der Vorwärtsreduktion, in der zweiten die Schritte des Rückwärtseinsetzens. Als Lösung liest man ab

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

die Korrektheit kann man leicht durch Einsetzen überprüfen.

c) Wir wenden erneut den Gauss-Algorithmus an:

$\begin{array}{cccc cccc} \color{red}{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \color{blue}{0} & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \color{blue}{0} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$	→	$\begin{array}{cccc cccc} \color{red}{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \color{blue}{0} & \color{red}{1} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \color{blue}{0} & \color{blue}{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$
$\begin{array}{cccc cccc} 1 & 1 & 0 & \color{blue}{0} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 1 & \color{blue}{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & \color{blue}{1} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \color{blue}{0} & \color{red}{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$	→	$\begin{array}{cccc cccc} 1 & 1 & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \color{blue}{1} & \color{blue}{0} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \color{blue}{0} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$
$\begin{array}{cccc cccc} 1 & \color{blue}{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$	→	$\begin{array}{cccc cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$

Daraus liest man die Inverse A^{-1} der Koeffizientenmatrix A ab als

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Wir prüfen das Resultat durch Ausmultiplizieren:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei kann man verwenden, dass der Eintrag in Zeile i und Spalte k des Produktes die Anzahl der Positionen ist, wo in der Zeile i von A und in der Spalte j von A^{-1} eine 1 steht. ○

3.14. Berechnen Sie die ersten sieben Näherungsbrüche des Kettenbruchs

$$x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{6 + \frac{1}{\dots}}}}}}$$

mit Hilfe der Matrizennotation.

Lösung. Die ersten Näherungsbrüche sind

$$\frac{p_0}{q_0} = 1, \quad \frac{p_1}{q_1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad \frac{p_2}{q_2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = 1 + \frac{3}{7} = \frac{10}{7}, \dots$$

Diese Brüche können auch mit Hilfe der Matrizenmultiplikation gewonnen werden. Dazu definieren wir die Matrix

$$B_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix}.$$

Als Startwert der Folge benötigen wir

$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 \\ q_0 & q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Rechnung ergibt nacheinander die Matrizen und Näherungsbrüche

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_0 & p_1 \\ q_0 & q_1 \end{pmatrix} B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} & \frac{p_2}{q_2} &= 1.\underline{4}28571428571428603 \\ \begin{pmatrix} p_2 & p_3 \\ q_2 & q_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} B_3 = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 43 \\ 7 & 30 \end{pmatrix} & \frac{p_3}{q_3} &= 1.\underline{4}333333333333333348 \\ \begin{pmatrix} p_3 & p_4 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_2 & p_3 \\ q_2 & q_3 \end{pmatrix} B_4 = \begin{pmatrix} 10 & 43 \\ 7 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 225 \\ 30 & 157 \end{pmatrix} & \frac{p_4}{q_4} &= 1.\underline{4}33121019108280159 \\ \begin{pmatrix} p_4 & p_5 \\ q_4 & q_5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_3 & p_4 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix} B_5 = \begin{pmatrix} 43 & 225 \\ 30 & 157 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 225 & 1393 \\ 157 & 972 \end{pmatrix} & \frac{p_5}{q_5} &= 1.\underline{4}33127572016460904 \\ \begin{pmatrix} p_5 & p_6 \\ q_5 & q_6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_4 & p_5 \\ q_4 & q_5 \end{pmatrix} B_6 = \begin{pmatrix} 225 & 1393 \\ 157 & 972 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1393 & 9976 \\ 972 & 6961 \end{pmatrix} & \frac{p_6}{q_6} &= 1.\underline{4}33127424220657975 \\ \begin{pmatrix} p_6 & p_7 \\ q_6 & q_7 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_5 & p_6 \\ q_5 & q_6 \end{pmatrix} B_7 = \begin{pmatrix} 1393 & 9976 \\ 972 & 6961 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9976 & 81201 \\ 6961 & 56660 \end{pmatrix} & \frac{p_7}{q_7} &= 1.\underline{4}33127426756088951 \\ & & \frac{p_8}{q_8} &= 1.\underline{4}33127426721944930 \\ & & \frac{p_9}{q_9} &= 1.\underline{4}33127426722315079 \\ & & \frac{p_{10}}{q_{10}} &= 1.\underline{4}33127426722311748 \end{aligned}$$

Die Konvergenz der Näherungsbrüche ist recht schnell und die Genauigkeit bereits bei kleinen Nennern sehr gut. ○

3.15. Die Primzahl $p = 10301$ ist die kleinste fünfstellige, $q = 929$ die größte dreistellige palindromische Primzahl. Man berechne die Inverse von $q \in \mathbb{F}_p$.

Lösung. Durchführung des erweiterten euklidischen Algorithmus mit der Tabelle ergibt:

k	a_k	b_k	q_k	r_k	s_k	t_k
-2					1	0
-1					0	1
0	10301	929	11	82	1	-11
1	929	82	11	27	-11	122
$n = 2$	82	27	3	1	34	-377
3	27	1	27	0	-929	10301

Aus der Zeile $n = 2$ liest man ab, dass $-377 \equiv 9924 \pmod{p}$ die Inverse in \mathbb{F}_p ist. Zur Kontrolle rechnen wir

$$929 \cdot 9924 = 9219396 = 895 \cdot 10301 + 1 \equiv 1 \pmod{p},$$

was das Resultat bestätigt. ○

3.16. Sei ∂ der Randoperator eines elektrischen Netzwerkes, in dem alle Kanten den gleichen Widerstand r haben. Für den Laplace-Operator gilt dann

$$\Delta = \partial R^{-1} \partial^t = \frac{1}{r} \partial \partial^t.$$

Der Grad d_i des Knotens i des Netzwerkes ist die Anzahl der Kanten, die in diesem Knoten zusammenkommen.

a) Zeigen Sie, dass die Matrix $\partial \partial^t$ die Matrixelemente

$$(\partial \partial^t)_{ik} = \begin{cases} d_i & i = k \\ -1 & i \neq k, \text{ es gibt eine Kante zwischen } i \text{ und } k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

hat.

b) Berechnen Sie $\partial \partial^t$ für das Netzwerk von Abschnitt 2.A und verifizieren Sie das Resultat von Teilaufgabe a).

Lösung. a) Die Matrixelemente von ∂ sind

$$\partial_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{Kante } j \text{ beginnt im Knoten } i \\ 1 & \text{Kante } j \text{ endet im Knoten } i \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit kann man jetzt die Matrixelemente von $\partial \partial^t$ berechnen:

$$(\partial \partial^t)_{ik} = \sum_{\text{Kanten } j} \partial_{ij} (\partial^t)_{jk} = \sum_{\text{Kanten } j} \partial_{ij} \partial_{kj}. \quad (9)$$

Für $i = k$ wird dies

$$(\partial \partial^t)_{ii} = \sum_{\text{Kanten } j} \partial_{ij}^2 = (\text{Anzahl Kanten } j \text{ mit Endpunkt } i) = d_i.$$

Für $i \neq k$ ist nur derjenige Term der Summe auf der rechten Seite von (9) von 0 verschieden, der zur Kante j mit Endpunkten i und k gehört. Dann ist aber $\partial_{ij} \partial_{kj} = -1$.

b) Der Randoperator des Netzwerkes von Abschnitt 2.A ist

$$\partial = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Rechnung ergibt für $\partial\partial^t$ die Matrix

$$\partial\partial^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

die genau die in Teilaufgabe a) gefundenen Matrixelemente hat.

○