Lösungen zu den Übungsaufgaben im Buch *Lineare Algebra: Eine anwendungsorientierte Einführung* von Andreas Müller, ISBN 978-3-662-67865-7, https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-67866-4, Website zum Buch: https://linalg.ch

Kapitel 4: Determinante

4.1. Bestimmen Sie die Werte von t, für die

a) $\begin{vmatrix} t-4 & 3 \\ 2 & t-9 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} t-1 & 4 \\ 3 & t-2 \end{vmatrix} = 0$

Lösung. Durch Ausmultiplizieren erhält man

a) $(t-4)(t-9) - 3\cdot 2 = t^2 - 13t + 36 - 6 = t^2 - 13t + 30 = (t-10)(t-3) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad t \in \{3, 10\}.$

b) $(t-1)(t-2) - 3\cdot 4 = t^2 - 3t + 2 - 12 = t^2 - 3t - 10 = (t-5)(t+2) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad t \in \{5, -2\}.$ $\bigcirc$

4.2. Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

45
linalg.ch/gauss/45

mit Hilfe der cramerschen Regel.

Lösung. Die Determinante von A ist

$$\det A = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}(8 + 0 + 0 - 0 - 2 - 2) = \frac{1}{2}$$

Die Determinanten, in denen man die i-te Spalte durch b ersetzt hat:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}x_1 &= \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}(4 + 0 + 0 - 0 - 1 - 4) = -\frac{1}{8} & x_1 &= -\frac{1}{4} \\
\frac{1}{2}x_2 &= \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}(8 + 0 + 0 - 0 - 0 - 2) = \frac{3}{4} & x_2 &= \frac{3}{2} \\
\frac{1}{2}x_3 &= \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}(0 + 0 + 1 - 0 - 4 - 0) = -\frac{3}{8} & x_3 &= -\frac{3}{4}
\end{aligned}$$ $\bigcirc$

4.3. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x - ty &= t \\ tx + \ y &= t^2. \end{aligned}$$

a) Für welche Werte von t ist die Matrix dieses Gleichungssystems regulär?

b) Verwenden Sie die cramersche Regel, um eine Formel für x und y in Abhängigkeit von t anzugeben.

Lösung. a) Die Determinante der Koeffizientenmatrix gibt darüber Auskunft, ob die Matrix regulär ist. Sie ist

$$\begin{vmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-t) \cdot t = 1 + t^2.$$

Da $1 + t^2 > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix immer regulär und damit das Gleichungssystem immer eindeutig lösbar.

b) Wir verwenden die cramersche Formel, dazu brauchen wir einerseits die bereits berechnete Determinante der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems und andererseits die Determinanten von Matrizen, die daraus durch Ersetzen einer Spalte entstehen:

1. Spalte ersetzt: $$\begin{vmatrix} t & -t \\ t^2 & 1 \end{vmatrix} = t + t^3$$

2. Spalte ersetzt: $$\begin{vmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{vmatrix} = t^2 - t^2 = 0$$

Daraus kann man mit Hilfe der cramerschen Formel die Lösung des Gleichungssystems ableiten:

$$x = \frac{t + t^3}{1 + t^2} = t, \qquad y = 0.$$

○

4.4. Berechnen Sie die Determinante der $n \times n$-Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Die erste Zeile von A_n hat den gemeinsamen Faktor $\frac{1}{n}$, den wir aus der Determinante ausklammern können. Wir erhalten dann $\det A_n = \frac{1}{n} \det B_n$, wobei

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist. Die Determinante von B_n können wir durch Entwicklung nach der ersten Spalte bestimmen:

$$\det B_n = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{=1} - (-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{=\det B_{n-1}}.$$

Damit haben wir eine Rekursionsformel für $\det B_n$ erhalten:

$$\det B_n = 1 + \det B_{n-1}$$

Da B_1 die Einheitsmatrix ist, gilt $\det B_1 = 1$ und damit folgt

$$\det B_n = n,$$

und schließlich

$$\det A_n = \frac{1}{n} \det B_n = \frac{1}{n} \cdot n = 1.$$

Man sagt auch, die Matrix A_n sei *unimodular*, $A_n \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. ○

4.5. Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det(A^{47})$.

Lösung. Zunächst berechnen wir die Determinante von A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 9 = -17$$

Aus der Produktformel folgt:

$$\det(A^{47}) = \det(A)^{47} = (-17)^{47} = -6.7780 \cdot 10^{57}.$$ ○

4.6. Betrachten Sie die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 9 & -3 & 15 \\ 0 & 11 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 17 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 19 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\det(A)$ und $\det(B)$.

b) Berechnen Sie $C = BAB^t$.

c) Berechnen Sie $\det(C)$, ohne erneut den Gauß-Algorithmus oder den Entwicklungssatz zu bemühen.

Lösung. a) A ist eine Dreiecksmatrix, die Determinante ist das Produkt der Diagonalelemente:

$$\det(A) = 13 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19 = 46189.$$

b) Die Matrix C ist

$$C = BAB^t = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 7 & 5 \\ -13 & -9 & -31 & -41 \\ 0 & 22 & 14 & 29 \\ 0 & 0 & 17 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -14 & 27 & 7 \\ -9 & 75 & -59 & -31 \\ 22 & -28 & 73 & 14 \\ 0 & -34 & 13 & 17 \end{pmatrix}.$$

c) Aus der Produktformel für Determinanten folgt

$$\det(C) = \det(BAB^t) = \det(B)\det(A)\det(B^t) = \det(B)\det(A)\det(B) = \det(A)\det(B)^2.$$

Im letzten Schritt wurde $\det(B) = \det(B^t)$ verwendet. Die Determinante $\det(A)$ auf der rechten Seite wurde in Teilaufgabe a) bereits berechnet. Es muss also nur noch $\det(B)$ berechnet werden. Dies kann mit dem Entwicklungssatz geschehen

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = -1.$$

Damit folgt

$$\det(BAB^t) = \det(A)\det(B)^2 = 46189 \cdot (-1)^2 = 46189. \qquad \bigcirc$$