Lösungen zu den Übungsaufgaben im Buch *Lineare Algebra: Eine anwendungsorientierte Einführung* von Andreas Müller, ISBN 978-3-662-67865-7, https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-67866-4, Website zum Buch: https://linalg.ch

Kapitel 7: Skalarprodukt und Orthogonalität

7.1. Berechnen Sie den Zwischenwinkel zwischen den Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Das Skalarprodukt ist

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-6) \cdot 3 + 8 \cdot (-4) + 0 \cdot 12 = -18 - 32 = -50.$$

Die Länge der Vektoren ist

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{a} &= 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 &&\Rightarrow \quad |\vec{a}| = 10 \\ \vec{b} \cdot \vec{b} &= 3^2 + 4^2 + 12^2 = 9 + 16 + 144 = 169 &&\Rightarrow \quad |\vec{b}| = 13 \end{aligned}$$

Für den Cosinus des Zwischenwinkels gilt also

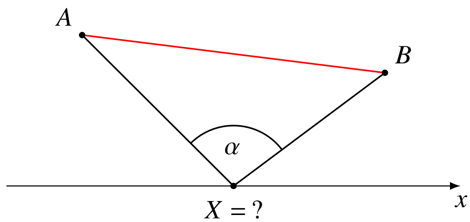
$$\cos\alpha = \frac{-50}{10 \cdot 13} = -0.384615384615384615\,38$$

und damit für den Zwischenwinkel

$$\alpha = 112.619865^\circ.$$

○

7.2. Gegeben sind die Punkte $A = (-2, 3, -2)$ und $B = (-6, -1, 1)$. Von welchen Punkten der x-Achse wird die Strecke AB unter einem Winkel von $\alpha = 90^\circ$ gesehen?



Lösung. Die Punkte X der x-Achse haben die Ortsvektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren $\overrightarrow{XA}$ und $\overrightarrow{XB}$ sind genau dann senkrecht, wenn das Skalarprodukt verschwindet, also

$$\begin{aligned}
\left(\begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}-6\\-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}\right)&=0\\
\begin{pmatrix}-2-x\\3\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6-x\\-1\\1\end{pmatrix}&=0\\
(2+x)(6+x)-3-2&=0\\
x^2+8x+7&=0\\
(x+7)(x+1)&=0
\end{aligned}$$

Daraus liest man ab, dass $x \in \{-1,-7\}$ sein muss, die gesuchten Punkte sind also $(-1,0,0)$ und $(-7,0,0)$. ○

7.3. Ortonormalisieren Sie die drei Vektoren

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \vec{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\qquad \vec{a}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir verwenden das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren:

$$\begin{aligned}
\vec{b}_1&=\frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\\
\vec{b}_2&=\frac{\vec{a}_2-(\vec{a}_2\cdot\vec{b}_1)\vec{b}_1}{\dots}=\frac{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}{\dots}=\frac{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}}{\dots}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\\
\vec{b}_3&=\frac{\vec{a}_3-(\vec{a}_3\cdot\vec{b}_1)\vec{b}_1-(\vec{a}_3\cdot\vec{b}_2)\vec{b}_2}{\dots}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right)^0=\begin{pmatrix}4\\-4\\4\end{pmatrix}^0=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}^0\\
&=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

○

7.4. Im Allgemeinen ist $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \neq \vec{a}^2\vec{b}^2$. Finden Sie Bedingungen, unter denen Gleichheit trotzdem gilt.

Lösung. Nach Definition ist

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\alpha,$$

also findet man durch quadrieren

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\alpha=\vec{a}^2\vec{b}^2\cos^2\alpha.$$

Das sind genau die Terme, die gemäß Aufgabenstellung verglichen werden sollen. Offenbar sind sie genau dann gleich, wenn $\cos^2\alpha = 1$, also $\cos\alpha = \pm 1$. Die Vektoren müssen also parallel oder entegegengesetzt gerichtet sein. $\bigcirc$

7.5. Finden Sie die Normalenform einer Ebenen durch den Nullpunkt, die die z-Achse unter einem Winkel von 30° schneidet und außerdem parallel zur Geraden durch die Punkte $A = (1,0,0)$ und $B = (0,2,0)$ ist.

Lösung. Der Normalenvektor $\vec{n}$ muss mit der z-Achse einen 60°-Winkel bilden, und muss auf dem Vektor $\overrightarrow{AB}$ senkrecht stehen. Mit Skalarprodukten ausgedrückt heißt dies:

$$\begin{aligned} \vec{n}\cdot\vec{e}_3 &= \frac{1}{2} \\ \vec{n}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} &= 0 \\ \vec{n}\cdot\vec{n} &= 1 \end{aligned}$$

Setzen wir an

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},$$

so finden wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2} \\ -x + 2y &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung bekommen wir $x = 2y$ und damit aus der ersten und dritten

$$\begin{aligned} 4y^2 + y^2 + \frac{1}{4} &= 1 \\ y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}x & \qquad = \sqrt{\frac{3}{5}} \end{aligned}$$

Die gesuchte Normalenform der Gleichung ist also

$$\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{3}{5}}\\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0$$ $\bigcirc$

7.6. Seien a und b zwei beliebige von 0 verschiedene Vektoren gleicher Länge. Berechnen Sie den Zwischenwinkel der Vektoren

$$v_+ = a + b \qquad \text{und} \qquad v_- = a - b$$

Lösung. Der Zwischenwinkel α kann aus dem Skalarprodukt ermittelt werden:

$$v_+ \cdot v_- = (a+b)\cdot(a-b) = a\cdot a - b\cdot b = |a|^2 - |b|^2 = 0 \qquad\Rightarrow\qquad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

○

7.7. Berechnen Sie den Winkel zwischen den Ebenen mit den Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & 4z & = & 6 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & -4. \end{array}$$

Lösung. Der Zwischenwinkel kann berechnet werden als Zwischenwinkel der beiden Normalenvektoren, die man aus den Geradengleichungen ablesen kann:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2\\3\\4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 3\\-2\\-1 \end{pmatrix}$$

Der Zwischenwinkel ist

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|} = \frac{6-6-4}{\sqrt{4+9+16}\,\sqrt{9+4+1}} = \frac{-4}{\sqrt{29\cdot 14}} = -0.198516666794186053336 \\ \alpha &= 101.450231136612^\circ \end{aligned}$$

○

7.8. Stellen Sie die Gleichungen der Geraden auf, die zur Geraden mit der Gleichung

$$6x - 8y - 13 = 0$$

den Abstand 4.5 haben.

Lösung. Gesucht ist die Menge der Punkte, deren Ortsvektoren von der gegebenen Geraden eine bestimmten Abstand haben, dazu brauchen wir zunächst die Abstandsformel. Diese erhalten wir, indem wir die Gleichung so skalieren, dass die Koeffizienten von x und y einen Einheitsvektor bilden, wegen $\sqrt{6^2+8^2} = 10$ ist das

$$\frac{6}{10}x - \frac{8}{10}y - \frac{13}{10} = 0.$$

Die Abstandsformel ist also

$$d = \frac{6}{10}x - \frac{8}{10}y - \frac{13}{10}.$$

Die beiden Geraden sind

$$\begin{aligned} 4.5 &= \frac{6}{10}x - \frac{8}{10}y - \frac{13}{10} &\Rightarrow&& 6x - 8y &= 13 + 45 = 58, \\ -4.5 &= \frac{6}{10}x - \frac{8}{10}y - \frac{13}{10} &\Rightarrow&& 6x - 8y &= 13 - 45 = -32. \end{aligned}$$

○

7.9. Stellen Sie die Gleichung der Tangenten des Kreises mit der Gleichung

$$(x-2)^2 + (y-5)^2 = 16$$

auf, die parallel zur Geraden mit der Gleichung

$$4x - 3y + 1 = 0$$

ist.

Lösung. Es gibt zwei solche Tangenten. Da die Tangente den gleichen Normalenvektor hat wie die vorgegebene Gerade, hat sie bis auf den konstanten Term auch die gleiche Hessesche Normalform. Der Einheitsnormalenvektor ist

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Die Gleichung einer solchen Geraden durch den Mittelpunkt hat die Form $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + e = 0$, wobei e so gewählt werden muss, dass der Mittelpunkt $(2, 5)$ des Kreises die Gleichung erfüllt, also

$$-e = \frac{8}{5} - \frac{15}{5} = -\frac{7}{5}.$$

Da der Radius des Kreises 4 ist, sind die gesuchten Geraden gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcrcr} \frac{4}{5}x & - & \frac{3}{5}y & + & \frac{7}{5} & = & 4 \\ \frac{4}{5}x & - & \frac{3}{5}y & + & \frac{7}{5} & = & -4 \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 3y & = & 13 \\ 4x & - & 3y & = & -27 \end{array}$$

○

7.10. Für eine Forschungsarbeit müssen Beschleunigungen sehr exakt gemessen werden können. Zu diesem Zweck wird ein rauscharmer Beschleunigungssensor verwendet, welcher zuvor kalibriert wird. Als Referenz wird dabei die Erdbeschleunigung verwendet. Leider reicht es für diese Anwendung aber nicht aus, den Standardwert von $9.81\ \frac{\mathrm{m}}{s^2}$ als Referenz zu verwenden, weshalb vorab die örtliche Erdbeschleunigung ermittelt wird.

Für die Bestimmung der örtlichen Erdbeschleunigung wird eine kleine Stahlkugel im Vakuum fallen gelassen und deren Fall mit einer High-Speed-Kamera aufgezeichnet. Die Auswertung der aufgenommenen Bilder ergab folgende Datenpunkte

i	Zeit t_i in Sekunden	Höhe h_i in Meter
1	0.00	1.4009
2	0.05	1.2176
3	0.10	1.0097
4	0.15	0.7774
5	0.20	0.5209

wobei der Zeitpunkt, zu dem die Kugel erstmals auf einem Bild auftaucht als $t = 0$ angenommen wurde. Zudem ist aus der Physik bekannt, dass die Höhe eines fallenden Objekts mit dem quadratischen Polynom

$$h = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0$$

beschrieben werden kann.

a) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem sich die bestmöglichen Werte für g, v_0, und h_0 bestimmen lassen. Im Gleichungssystem müssen alle Messwerte berücksichtigt werden. Zudem soll es erweitert werden können, wenn mehr Daten bekannt werden.

b) Bestimmen Sie die örtliche Erdbeschleunigung g.

Lösung. a) Wir möchten gerne g, v_0 und h_0 bestimmen, so dass für jeden Index i die Gleichung

$$h_i = h_0 + v_0 t_i - \frac{1}{2} g t_i^2$$

möglichst gut erfüllt ist. Dies liefert uns das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} h_0 & + & t_1 v_0 & + & \frac{-1}{2} t_1^2 g & = & h_1 \\ h_0 & + & t_2 v_0 & + & \frac{-1}{2} t_2^2 g & = & h_2 \\ h_0 & + & t_3 v_0 & + & \frac{-1}{2} t_3^2 g & = & h_3 \\ h_0 & + & t_4 v_0 & + & \frac{-1}{2} t_4^2 g & = & h_4 \\ h_0 & + & t_5 v_0 & + & \frac{-1}{2} t_5^2 g & = & h_5, \end{array} \tag{1}$$

welches im Sinne der kleinsten Quadrate gelöst werden muss. In Matrixform ist dies das Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0.00 & 0.00000 \\ 1 & 0.05 & -0.00125 \\ 1 & 0.10 & -0.00500 \\ 1 & 0.15 & -0.01125 \\ 1 & 0.20 & -0.02000 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} h_0 \\ v_0 \\ g \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1.4009 \\ 1.2176 \\ 1.0097 \\ 0.7774 \\ 0.5209 \end{pmatrix}}_{b}.$$

Um die Unbekannten g, v_0 und h_0 zu bestimmen, muss das Gleichungssystem $A^tAx = A^tb$ gelöst werden. Die Matrizenprodukte sind

$$A^tA = \begin{pmatrix} 5 & 0.5 & -0.0375 \\ 0.5 & 0.075 & -0.00625 \\ -0.0375 & -0.00625 & 5.53125 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}, \quad A^tb = \begin{pmatrix} 4.9265 \\ 0.38264 \\ -0.02573425 \end{pmatrix}.$$

81
linalg.ch/gauss/81

b) Die Lösung dieses Gleichungssystems mit dem Taschenrechner liefert

$$x = (A^tA)^{-1}A^tb = \begin{pmatrix} 1.4 \\ -3.42 \\ 9.76 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist die beste Schätzung für die örtliche Beschleunigung $g = 9.76\,\frac{\text{m}}{s^2}$.

○

7.11. Ein Student muss für seine Bachelorarbeit Beschleunigungen eines 2-Achsen Roboters messen und entwickelt dafür ein PCB, auf welchem er zwei 1-Achsen-Beschleunigungssensoren orthogonal zueinander anbringt. Jeder der Sensoren sollte ihm den Anteil der Beschleunigung in einer Richtung (x- bzw. y-Achse) ermitteln, womit er in der Lage ist, Beschleunigungen in der Ebene messen. Aufgrund von Fertigungstoleranzen wurden die Sensoren leider nicht exakt auf dem PCB platziert, wodurch Messfehler entstehen. Wir können jedoch annehmen, dass die wahren Beschleunigungswerte a_x und a_y linear von den gemessenen Beschleunigungswerten m_x und m_y abhängen. Um diesen Zusammenhang zu ermitteln, wurden folgende Paare gemessen:

a_x	a_y	m_x	m_y
9.81	0.00	9.83	1.02
0.00	9.81	−1.11	10.21
6.94	−6.94	6.98	−6.20

Gesucht ist jetzt eine 2×2-Matrix C, die den Zusammenhang zwischen den wahren Werten (a_x, a_y) und den gemessenen Werten (m_x, m_y) möglichst gut wiedergeben kann.

a) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem sich die bestmöglichen Werte für die Matrixelemente von C bestimmen lassen. Im Gleichungssystem müssen alle Messwerte berücksichtigt werden. Zudem soll es erweitert werden können, wenn mehr Daten bekannt werden.

b) Bestimmen Sie die Matrix C.

Hinweis. Verwenden Sie einen Taschenrechner oder Computer, um das in a) gefundene Gleichungssystem zu lösen.

Lösung. a) Wir suchen eine Matrix, die Beschleunigungs-Vektoren gemäß

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \end{pmatrix} \tag{2}$$

umrechnet. Die Einträge in C sind die Unbekannten. Im Idealfall lassen sich die Messwerte exakt wiedergeben, dann gelten die Gleichungen:

$$\begin{array}{ccccccccc} c_{11}m_x & + & c_{12}m_y & & & & & = & a_x \\ & & & & c_{21}m_x & + & c_{22}m_y & = & a_y \end{array} \tag{3}$$

Setzt man die drei Messungen ein, erhält man daraus sechs Gleichungen für die vier gesuchten Matrixeinträge von C, also ein überbestimmtes Gleichungssystem. Die Matrix A und die rechte Seite b dieses Gleichungssystems sind

$$A = \begin{pmatrix} 9.83 & 1.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9.83 & 1.02 \\ -1.11 & 10.21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.11 & 10.21 \\ 6.98 & -6.20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.98 & -6.20 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 9.81 \\ 0 \\ 0 \\ 9.81 \\ 6.94 \\ -6.94 \end{pmatrix}$$

Das gesuchte Gleichungssystem hat die Matrix A^tA und die rechte Seite A^tb:

$$A^tA = \begin{pmatrix} 146.58 & -44.58 & 0 & 0 \\ -44.58 & 143.72 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 146.58 & -44.58 \\ 0 & 0 & -44.58 & 143.72 \end{pmatrix}, \qquad A^tb = \begin{pmatrix} 144.87 \\ -33.02 \\ -59.33 \\ 143.19 \end{pmatrix}$$

linalg.ch/gauss/82

b) Um die Matrixelemente von C zu bestimmen muss das Gleichungssystem $A^tAx = A^tb$ nun gelöst werden. Mann findet

$$x = (A^tA)^{-1}A^tb = \begin{pmatrix} 1.0141 \\ 0.0848 \\ -0.1123 \\ 0.9614 \end{pmatrix},$$

Woraus sich die folgende Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1.0141 & 0.0848 \\ -0.1123 & 0.9614 \end{pmatrix}$$

ergibt. ○

7.12. Eine Kugel mit Radius 7 bewegt sich auf der Geraden g durch die Punkte $A = (67, 81, -71)$ und $B = (-33, -43, 57)$ und trifft auf die Ebene σ mit der Gleichung

$$2x + 3y + 6z = 147.$$

Wo befindet sich das Zentrum der Kugel in dem Moment, wo die Kugel die Ebene σ berührt?

Lösung. Die Gerade hat die Parameterdarstellung

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{r}, \qquad \text{wobei} \qquad \vec{r} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -100 \\ -124 \\ 128 \end{pmatrix}.$$

Die Hessesche Normalform der Ebenengleichung ist wegen $\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7$

$$\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y + \frac{6}{7}z = 21.$$

Die Bedingung, dass die Kugel die Ebene berühren muss ist gleichwertig mit der Bedingung, dass sich das Zentrum im Abstand 7 von der Ebene befinden muss, es muss also gelten

$$\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y + \frac{6}{7}z = 21 \pm 7.$$

Damit haben wir die folgenden Gleichungen zu lösen:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x & & & & & + & 100t & = & 67 \\
 & & y & & & + & 124t & = & 81 \\
 & & & & z & - & 128t & = & -71 \\
\frac{2}{7}x & + & \frac{3}{7}y & + & \frac{6}{7}z & & & = & 21 \pm 7
\end{array}$$

linalg.ch/gauss/83

linalg.ch/gauss/84

mit dem Tableau

$$\begin{array}{|cccr|r|}\hline
1 & 0 & 0 & 100 & 67 \\
0 & 1 & 0 & 124 & 81 \\
0 & 0 & 1 & -128 & -71 \\
\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & 0 & 21 \pm 7 \\ \hline
\end{array}
= \left\{ \begin{array}{l}
\begin{array}{|cccr|r|}\hline
1 & 0 & 0 & 100 & 67 \\
0 & 1 & 0 & 124 & 81 \\
0 & 0 & 1 & -128 & -71 \\
\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & 0 & 14 \\ \hline
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{|cccc|r|}\hline
1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -12 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 25 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ \hline
\end{array} \\
\begin{array}{|cccr|r|}\hline
1 & 0 & 0 & 100 & 67 \\
0 & 1 & 0 & 124 & 81 \\
0 & 0 & 1 & -128 & -71 \\
\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & 0 & 28 \\ \hline
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{|cccc|r|}\hline
1 & 0 & 0 & 0 & -58 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -74 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 89 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} \\ \hline
\end{array}
\end{array} \right.$$

Daraus liest man ab, dass jeweils dann, wenn der Kugelmittelpunkt sich in den Punkten

$$P_+ = (-58, -74, 89) \qquad \text{und} \qquad P_- = (-8, -12, 25)$$

befindet, die Kugel die Ebene berührt. ○