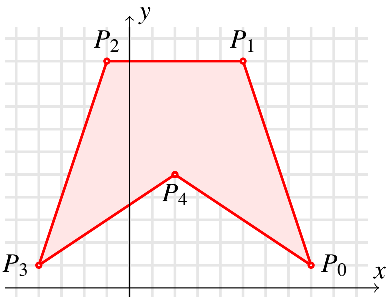
Lösungen zu den Übungsaufgaben im Buch *Lineare Algebra: Eine anwendungsorientierte Einführung* von Andreas Müller, ISBN 978-3-662-67865-7, https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-67866-4, Website zum Buch: https://linalg.ch

Kapitel 8: Flächeninhalt, Volumen, Orientierung

8.1. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Polygons mit den Ecken in Abbildung 8.27



$$\begin{aligned}
P_0 &= (8,1)\\
P_1 &= (5,10)\\
P_2 &= (-1,10)\\
P_3 &= (-4,1)\\
P_4 &= (2,5)
\end{aligned}$$

Abbildung 1: Flächeninhalt eines Fünfeckes in der Ebene.

Lösung. Der Flächeninhalt kann mit der Schuhbändel-Formel gefunden werden:

$$\begin{aligned}
F = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} 8 & 1\\ 5 & 10\\ -1 & 10\\ -4 & 1\\ 2 & 5\\ 8 & 1 \end{matrix}\right| &= \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} (8\cdot 10 - 1\cdot 5)\\ +(5\cdot 10 - 10\cdot(-1))\\ +((-1)\cdot 1 - 10\cdot(-4))\\ +((-4)\cdot 5) - 1\cdot 2)\\ +(2\cdot 1 - 5\cdot 8) \end{matrix}\right.\\
&= \frac{1}{2}(75+60+39-22-38) = 57.
\end{aligned}$$

8.2. Gegeben ist eine Ebene σ, welche durch die Punkte

$$A = (12,0,0),\qquad B = (0,0,5)\qquad \text{und}\qquad C = (12,5,0)$$

geht, sowie ein gerades Rohr mit Durchmesser 1, dass zwischen den Punkten

$$D = (4,-5,6)\qquad \text{und}\qquad E = (8,5,10)$$

installiert ist (siehe auch Abbildung 8.28). Nun wird eine Kugel mit Radius 2 im Punkt B auf die Ebene gelegt und losgelassen. Die Kugel rollt auf den Punkt A zu. Wird die Kugel unter dem Rohr hindurch passen und damit den Punkt A erreichen?

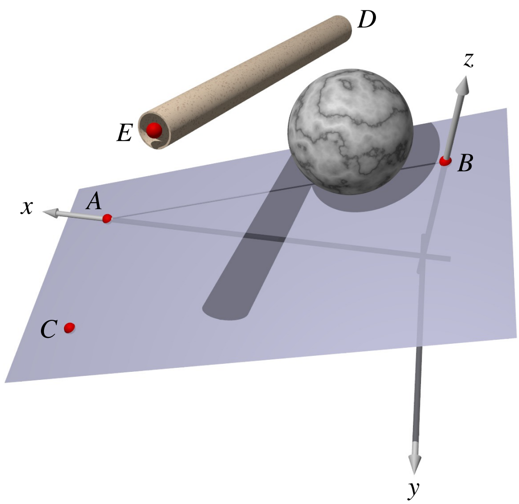


Abbildung 2: Zu Aufgabe 8.2.

Lösung. Die Kugel wird genau dann den Punkt A erreichen, wenn der Abstand zwischen der Geraden $\vec{g}_1$, die das Rohr beschreibt, und der Geraden $\vec{g}_2$, auf der sich der Mittelpunkt der Kugel bewegt, größer ist als die Summe der beiden Radien (Radius der Kugel und des Rohres):

$$d > 2 + 0.5 = 2.5.$$

Wir benötigen also Stütz- und Richtungsvektoren der beiden Geraden.

Der Richtungsvektor der Geraden $\vec{g}_1$ ist

$$\vec{r}_1 = \vec{e} - \vec{d} = \begin{pmatrix} 8-4 \\ 5-(-5) \\ 10-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und als Stützvektor verwenden wir $\vec{d}$. Die Gerade $\vec{g}_1$ ist somit beschrieben:

$$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die Gerade $\vec{g}_2$ beschreibt die Bewegung des Kugel-Mittelpunktes. Sie verläuft parallel zum Vektor $\overrightarrow{AB}$ und hat zur Ebene σ einen konstanten Abstand von 2. Als Richtungsvektor der Geraden $\vec{g}_2$ verwenden wir daher

$$\vec{r}_2 = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0-12 \\ 0-0 \\ 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und als Stützvektor

$$\vec{p} = \vec{a} + 2 \cdot \vec{n}_0,$$

wobei $\vec{n}_0$ der auf Länge 1 normierte Normalenvektor der Ebene ist. Um den Normalenvektor zu berechnen verwenden wird das Kreuzprodukt:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 5 \cdot 5 \\ 5 \cdot 0 - 0 \cdot -(12) \\ -12 \cdot 5 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 \\ 0 \\ -60 \end{pmatrix}$$

und normieren ihn anschließend auf die Länge 1:

$$\vec{n}_0 = (-1) \cdot \frac{1}{|\vec{n}|} \vec{n} = (-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{(-25)^2 + 0^2 + (-60)^2}} \begin{pmatrix} -25 \\ 0 \\ -60 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Zusätzlich wurde noch mit dem Faktor (-1) multipliziert, um sicherzustellen, dass der Normalenvektor eine positive z-Komponente hat und damit nach oben schaut. Die Richtung des Normalenvektors ist hier von Bedeutung, da die Kugel auf der Ebene rollt und nicht unter der Ebene. Die Gerade $\vec{g}_2$ ist somit ebenfalls beschrieben:

$$\begin{aligned} \vec{g}_2 = \vec{a} + 2 \cdot \vec{n}_0 + s \cdot \vec{r}_2 &= \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 166 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Um zum Schluss nun noch den Abstand zwischen den beiden Geraden zu berechnen, verwenden wir die Abstandsformel für den windschiefen Abstand:

$$\begin{aligned} d &= \frac{(\vec{d} - \vec{p}) \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|} \\ &= \frac{\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 166 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right)}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|} = \frac{\frac{1}{13} \begin{pmatrix} -114 \\ -65 \\ 54 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ -68 \\ 120 \end{pmatrix}}{\sqrt{50^2 + (-68)^2 + 120^2}} \\ &= \frac{400}{146.711} = 2.726. \end{aligned}$$

Da der Abstand d größer ist als 2.5 wird die Kugel unter dem Rohr hindurch passen und den Punkt A erreichen. ○

8.3. Betrachten Sie die Vektoren

$$\vec{a}_0 = \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\vec{a}_2 = \vec{a}_0 \times \vec{a}_1$.

b) Bestimmen Sie Länge und Zwischenwinkel der Vektoren $\vec{a}_0$ und $\vec{a}_1$.

c) Betrachten Sie die rekursiv definierte Folge $\vec{a}_{n+1} = \vec{a}_{n-1} \times \vec{a}_n$. Berechnen Sie $\vec{a}_6$.

Lösung. a) Das Vektorprodukt ist

$$\vec{a}_0 \times \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)\cdot(-10) - (-11)\cdot 5 \\ 5\cdot 2 - (-10)\cdot 14 \\ 14\cdot(-11) - 2\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 150 \\ -150 \end{pmatrix}.$$

b) Die Länge der Vektoren ist

$$\begin{aligned} |\vec{a}_0| &= \sqrt{196+4+25} = 15, \\ |\vec{a}_1| &= \sqrt{4+121+100} = 15. \end{aligned}$$

Da wir das Vektorprodukt bereits berechnet haben, können wir die Zwischenwinkelformel

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{a}_0 \times \vec{a}_1|}{|\vec{a}_0|\cdot|\vec{a}_1|}$$

für das Vektorprodukt verwenden. Dazu brauchen wir die Länge des Vektorproduktes:

$$|\vec{a}_0 \times \vec{a}_1| = \sqrt{75^2 + 2\cdot 150^2} = 25\sqrt{3^2 + 2\cdot 6^2} = 25\sqrt{9 + 2\cdot 36} = 25\sqrt{81} = 225$$

und finden für den Zwischenwinkel

$$\sin\alpha = \frac{225}{15\cdot 15} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 90^\circ,$$

die beiden Vektoren stehen also senkrecht aufeinander.

c) Die Vektoren $\vec{a}_0$ und $\vec{a}_1$ stehen senkrecht und haben beide Länge 15. Der Vektor $\vec{a}_2$ ist auf beiden senkrecht, die drei Vektoren $\vec{a}_0$, $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ bilden ein Rechtssystem. Alle Vektorprodukte $\vec{a}_n$ sind daher immer Vielfache dieser Vektoren, $\vec{a}_3$ ist ein Vielfaches von $\vec{a}_0$, $\vec{a}_4$ ist ein Vielfaches von $\vec{a}_1$ und allgemein ist $\vec{a}_n$ ein Vielfaches von $\vec{a}_{n-3}$. Wir kennen also von allen Vektoren die Richtung, wir müssen nur noch die Länge bestimmen. Da die Vektoren senkrecht stehen, hat das Vektorprodukt jeweils als Länge das Produkt der Längen der Faktoren, also $|\vec{a}_{n+1}| = |\vec{a}_{n-1}|\cdot|\vec{a}_n|$. Die Längen sind

Vektor	$\vec{a}_0$	$\vec{a}_1$	$\vec{a}_2$	$\vec{a}_3$	$\vec{a}_4$	$\vec{a}_5$	$\vec{a}_6$	$\vec{a}_7$
Länge	15	15	15^2	15^3	15^5	15^8	15^{13}	15^{21}

Daraus können wir die Länge des Vektors $\vec{a}_n$ ablesen. Es ist $|\vec{a}_n| = 15^{F_n}$, wobei F_n die n-te Fibonacci-Zahl ist. Insbesondere wissen wir jetzt genau, wie lang der Vektor $\vec{a}_6$ ist, nämlich $|\vec{a}_6| = 15^{13}$.

Die Richtung von $\vec{a}_6$ ist die Richtung von $\vec{a}_0$, der selbst die Länge 15 hat. Es folgt

$$\vec{a}_6 = 15^{13}\cdot\frac{\vec{a}_0}{|\vec{a}_0|} = 15^{12}\vec{a}_0 = 129746337890625\begin{pmatrix} 14 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1816448730468750 \\ -259492675781250 \\ 648731689453125 \end{pmatrix}.$$ ○

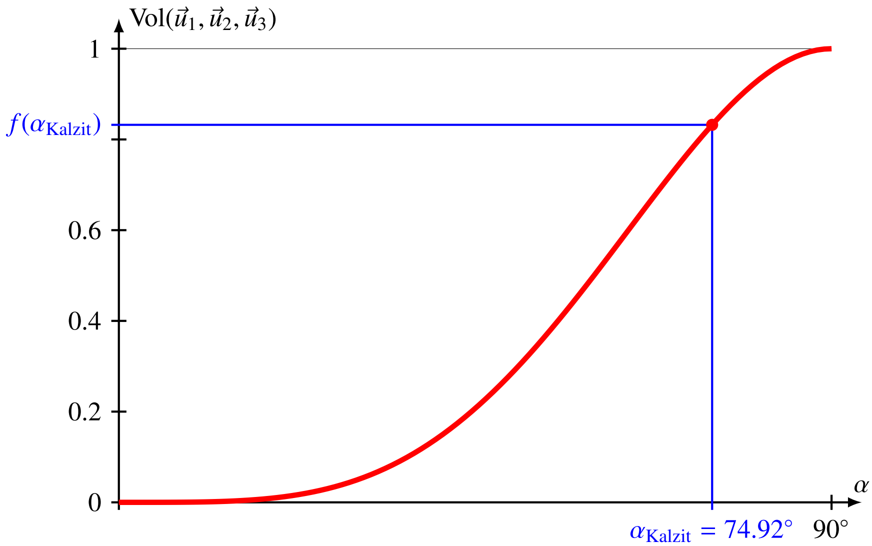


Abbildung 3: Das Volumen eines Rhomboeders mit Rhomboederwinkel α ist das um den Faktor $f(\alpha) = 1 + 2\cos^3\alpha - 3\cos^2\alpha$ reduzierte Volumen eines Quaders mit gleichen Seitenlängen.

8.4. Der Kalzit-Kristall ist ein Rhomboeder, ein Parallelepiped, dessen Seitenflächen Parallelogramme mit den gleichen Winkeln α und $180° - \alpha$ sind. Im Falle des Kalzit-Kristalls ist $\alpha_{\text{Kalzit}} = 74.92°$. Seien die Kantenlängen eines solchen Rhomboeders a_1, a_2 und a_3.

a) Bestimmen Sie das Volumen.

b) Wie groß ist das Volumen eines Kalzitkristalls mit Seitenlängen 1?

Lösung. Seien u_1, u_2 und u_3 Einheitsvektoren entlang der Kanten. Die Skalarprodukte sind

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \begin{cases} \cos\alpha & \forall i \neq j. \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Rhomboeder wird von den Vektoren $a_1\vec{u}_1$, $a_2\vec{u}_2$ und $a_3\vec{u}_3$ aufgespannt. Das Volumen wird von der Gram-Determinante bestimmt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(a_1\vec{u}_1, a_2\vec{u}_2, a_3\vec{u}_3)^2 &= \mathrm{Gram}(a_1\vec{u}_1, a_2\vec{u}_2, a_3\vec{u}_3) \\
&= \begin{vmatrix} a_1\vec{u}_1 \cdot a_1\vec{u}_1 & a_1\vec{u}_1 \cdot a_2\vec{u}_2 & a_1\vec{u}_1 \cdot a_3\vec{u}_3 \\ a_2\vec{u}_2 \cdot a_1\vec{u}_1 & a_2\vec{u}_2 \cdot a_2\vec{u}_2 & a_2\vec{u}_2 \cdot a_3\vec{u}_3 \\ a_3\vec{u}_3 \cdot a_1\vec{u}_1 & a_3\vec{u}_3 \cdot a_2\vec{u}_2 & a_3\vec{u}_3 \cdot a_3\vec{u}_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1a_2\cos\alpha & a_1a_3\cos\alpha \\ a_2a_1\cos\alpha & a_2^2 & a_2a_3\cos\alpha \\ a_3a_1\cos\alpha & a_1a_3\cos\alpha & a_3^2 \end{vmatrix} \\
&= a_1^2a_2^2a_3^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\alpha & \\ \cos\alpha & 1 & \cos\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \cos\alpha & 1 & \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Die Determinante kann mit der Sarrus-Formel berechnet werden:

$$= a_1^2 a_2^2 a_3^2 (1 + 2\cos^3\alpha - 3\cos^2\alpha)$$

Das Volumen ist die Wurzel:

$$\operatorname{Vol}(a_1\vec{u}_1, a_2\vec{u}_2, a_3\vec{u}_3)^2 = a_1 a_2 a_3 \cdot (1 + 2\cos^3\alpha - 3\cos^2\alpha).$$

a) Das Volumen des Rhomboeders ist also das Volumen eines Quaders mit Seiten a_1, a_2 und a_3, reduziert um den nur vom Winkel α abhängigen Faktor

$$\operatorname{Vol}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = f(\alpha) = 1 + 2\cos^3\alpha - 3\cos^2\alpha.$$

Der Graph der Funktion $f(\alpha)$ ist in Abbildung **??** dargestellt.

b) Für einen Kalzitkristall ergibt die Rechnung $f(\alpha_{\text{Kalzit}}) = 0.8322$. ○

8.5. Gegeben ist der Einheitsvektor

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Bilder $\vec{e}_i'$ der Standardbasisvektoren $\vec{e}_i$, $i = 1,\dots,3$, unter einer Drehung um die Achse mit Richtung $\vec{u}$ und um den Drehwinkel $\alpha = 60^\circ$.

b) Wenden Sie die Drehung auch auf $\vec{e}_1'$ an.

Lösung. Die Drehung kann mit Hilfe der Rodrigues-Formel berechnet werden. Dazu sind die Skalarprodukt

$$\vec{u} \cdot \vec{e}_i = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

und die Vektorprodukte

$$\vec{u} \times \vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_2 - \vec{e}_3).$$

Durch zyklische Vertauschung erhalten wir auch die Produkte

$$\vec{u} \times \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_3 - \vec{e}_1) \qquad \text{und} \qquad \vec{u} \times \vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2).$$

Ebenso werden die Werte

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660254$$

der trigonometrischen Funktionen benötigt. Die Rodrigues-Formel liefert für die Drehung um $\vec{u}$

$$\begin{aligned}
\vec{x}' &= \cos\alpha \cdot \vec{x} + (1 - \cos\alpha)(\vec{u} \cdot \vec{x})\vec{u} + \sin\alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{x})\\
&= \frac{1}{2}\vec{x} + (1 - \tfrac{1}{2})\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{u} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\vec{u} \times \vec{x}) = \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\vec{u} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\vec{u} \times \vec{x}).
\end{aligned}$$

a) Für $\vec{x} = \vec{e}_1$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1' &= \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_2 - \vec{e}_3)\\
&= \frac{4}{6}\vec{e}_1 + \frac{4}{6}\vec{e}_2 - \frac{2}{6}\vec{e}_3\\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

und die Bilder der anderen Vektoren durch zyklische Vertauschung

$$\vec{e}_2' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_3' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

b) Das Bild $\vec{e}_1''$ kann man erhalten, indem an in der Darstellung von $\vec{e}_1$ die Vektoren $\vec{e}_i$ durch $\vec{e}_i'$ ersetzt. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1' &= \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 - \frac{1}{3}\vec{e}_3\\
\vec{e}_1'' &= \frac{2}{3}\vec{e}_1' + \frac{2}{3}\vec{e}_2' - \frac{1}{3}\vec{e}_3'\\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 - \frac{1}{3}\vec{e}_3\right) + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3\right)\\
&= \frac{1}{9}\Bigl((\underbrace{4-2-2}_{=0})\vec{e}_1 + (\underbrace{4+4+1}_{=9})\vec{e}_2 + (\underbrace{-2+4-2}_{=0})\vec{e}_3\Bigr) = \vec{e}_2.
\end{aligned}$$

Das Bild $\vec{e}_1''$ ist die Drehung des Vektors $\vec{e}_1$ um die Achse $\vec{u}$ um einen 120°-Winkel. Diese Drehung vertauscht die Standardbasisvektoren zyklisch, so dass das Resultat $\vec{e}_1'' = \vec{e}_2$ nicht überrascht. ○