Lösungen zu den Übungsaufgaben im Buch *Lineare Algebra: Eine anwendungsorientierte Einführung* von Andreas Müller, ISBN 978-3-662-67865-7, https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-67866-4, Website zum Buch: https://linalg.ch

Kapitel 9: Transformationen

9.1. Betrachten Sie die Menge

$$G = \left\{ m(a) = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R}^* \right\}$$

der 2×2-Matrizen mit identischen Einträgen. Die Matrizen $m(a)$ haben die Determinante $\det m(a) = 0$, sie sind also nicht regulär. Trotzdem soll in dieser Aufgabe gezeigt werden, dass die Menge G eine Gruppe mit der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung ist.

a) Rechnen Sie nach, dass $m(a)m(b) \in G$ ist.

b) Finden Sie das neutrale Element in G.

c) Finden Sie das inverse Element von $m(a)$.

Lösung. a)

$$m(a)m(b) = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab+ab & ab+ab \\ ab+ab & ab+ab \end{pmatrix} = m(2ab) \in G.$$

b) Wir suchen eine Zahl e derart, dass $m(a)m(e) = m(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}^*$ gilt. Wegen $m(e)m(a) = m(2ea)$ muss $e = \frac{1}{2}$ sein.

c) Das inverse Element $m(b)$ von $m(a)$ hat die Eigenschaft

$$m(\tfrac{1}{2}) = m(a)m(b) = m(2ab) \qquad \Rightarrow \qquad 2ab = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{1}{4a}.$$

Die Inverse ist also $m(a)^{-1} = m(1/4a)$. ○

9.2. Der Mittelpunkt des Würfels mit Kantenlänge 2 befindet sich im Koordinatenursprung (Abbildung 9.26). Eine Drehung des Raumes führt die Punkte A, B und C in die Punkte A', B' bzw. C' über.

a) Finden Sie die Drehmatrix R.

b) Wie groß ist der Winkel zwischen den beiden Ortsvektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$.

c) Wie groß ist der Winkel zwischen den Bildern der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}?$$

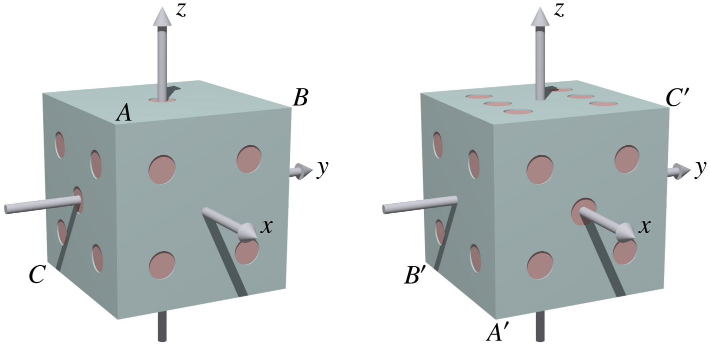

Abbildung 1: Aufgabe 9.2 fragt nach einer Drehmatrix, die den linken Würfel in den rechten Würfel überführt.

Lösung. a) Die dargestellte Drehung bildet die Standardbasis-Vektoren wie folgt ab:

$$\vec{e}_1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Drehmatrix ist daher

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alternativ hätte die Aufgabe aber auch wie folgt gelöst werden können:
Da die Punkte A, B und C mit Ortsvektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

auf die Punkte A', B' und C' mit Ortsvektoren

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

abgebildet werden, müssen folgende Gleichungen erfüllt sein:

$$\vec{a}' = R\vec{a}, \quad \vec{b}' = R\vec{b}, \quad \vec{c}' = R\vec{c}.$$

Leider kann mit diesen Gleichungen die Drehmatrix noch nicht bestimmt werden, da die Punkte A, B und C in einer Ebene liegen und damit linear abhängig sind. Wir müssen daher noch ein weiteres Punktepaar aus der Zeichnung herauslesen. Wir wählen die vordere untere Ecke

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \vec{d}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{d}' = R\vec{d}.$$

Die drei Gleichungen

$$\vec{a}' = R\vec{a}, \quad \vec{b}' = R\vec{b}, \quad \vec{d}' = R\vec{d}$$

können nun in einer Gleichung zusammengefasst werden zu

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=P'} = R \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=P},$$

wobei in den Spalten der Matrix P die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{d}$ enthalten sind und in den Spalten der Matrix P' die Vektoren $\vec{a}'$, $\vec{b}'$ und $\vec{d}'$. Damit kann nun die Drehmatrix gefunden werden als

$$R = P'P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wie man sieht, kommt man auf das selbe Ergebnis wie oben.

b) Die Zwischenwinkelformel muss auf die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ angewendet werden:

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3} \\ |\vec{b}| &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \\ \cos(\alpha) &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3} \\ \alpha &= 70.529^\circ. \end{aligned}$$

c) Die Zwischenwinkelformel muss auf die Vektoren

$$R \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$R \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

angewendet werden:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{(-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \alpha &= 144.736^\circ. \end{aligned}$$

○

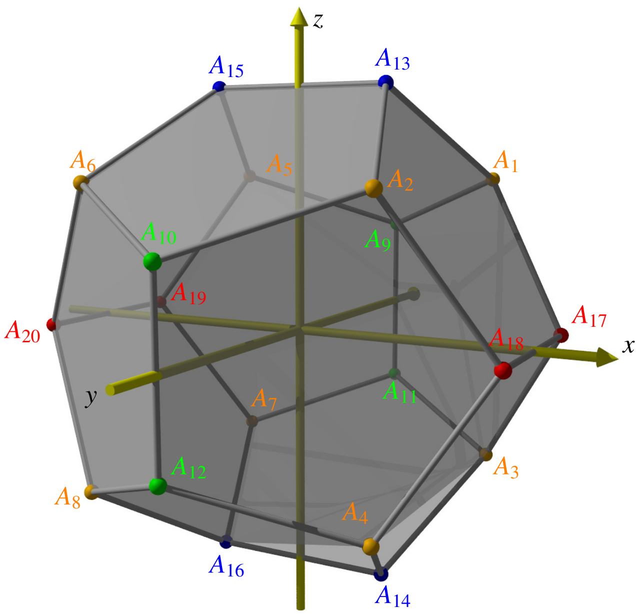

Abbildung 2: Dodekaeder für Aufgabe 9.3.

9.3. Vom Dodekaeder in Abbildung 9.27 sind die Punkte

$$\begin{aligned} A_1 &= (1,1,1), & A_{10} &= (0,-\varphi,1/\varphi), & A_{13} &= (1/\varphi,0,\varphi), \\ A_{15} &= (-1/\varphi,0,\varphi), & A_{18} &= (\varphi,-1/\varphi,0) \end{aligned} \qquad \text{mit} \quad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

bekannt.

a) Finden Sie eine Drehmatrix R, welche A_{18} auf A_{10} abbildet und die Seitenfläche $A_1A_9A_5A_{15}A_{13}$ in sich abbildet.

b) Finden Sie den Drehwinkel der von R beschriebenen Drehung.

Lösung. a) Außer der bereits bekannten Zuordnung $A_{18} \to A_{10}$, können wir aus der Zeichnung zusätzlich ablesen $A_1 \to A_{13}$ und $A_{13} \to A_{15}$. Diese Zuordnungen können wir jetzt vektoriell schreiben:

$$R\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \varphi & 1/\varphi \\ 1 & -1/\varphi & 0 \\ 1 & 0 & \varphi \end{pmatrix}}_{=B_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\varphi & 0 & -1/\varphi \\ 0 & -\varphi & 0 \\ \varphi & 1/\varphi & \varphi \end{pmatrix}}_{=B_2} \qquad \Rightarrow \qquad R = B_2B_1^{-1}. \tag{1}$$

Die numerische Rechnung ergibt

$$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0.30902 & 0.80902 & -0.11803 \\ 0.50000 & -0.30902 & -0.19098 \\ -0.19098 & -0.50000 & 0.69098 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
R = B_2B_1^{-1} &= \begin{pmatrix} 0.61803 & 0.00000 & -0.61803 \\ 0.00000 & -1.61803 & 0.00000 \\ 1.61803 & 0.61803 & 1.61803 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.30902 & 0.80902 & -0.11803 \\ 0.50000 & -0.30902 & -0.19098 \\ -0.19098 & -0.50000 & 0.69098 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.30902 & 0.80902 & -0.50000 \\ -0.80902 & 0.50000 & 0.30902 \\ 0.50000 & 0.30902 & 0.80902 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

b) Den Drehwinkel können wir mit der Spurformel berechnen:

$$
\begin{aligned}
&\cos\alpha = \frac{\operatorname{tr}-1}{2} = \frac{\varphi-1}{2} = 0.30902 \\
\Rightarrow\qquad &\alpha = 72^\circ.
\end{aligned}
$$

○

Diskussion. Die Inverse B_1^{-1} in (**??**) können wir auch exakt berechnen. Dazu beachten wir, dass sich alle Resultate während der Durchführung des Gauß-Algorithmus in der Form $a + b\varphi$ geschrieben werden können, wobe a und b rationale Zahlen sind. Zum Beispiel ist

$$
\begin{aligned}
\varphi^2 &= \varphi + 1 \\
\frac{1}{\varphi} &= \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi - 1 \\
\frac{1}{1-2\varphi} &= \frac{1}{1-1-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2\varphi-1}{5} \\
\frac{5}{2}\frac{1}{\varphi+2} &= \frac{3-\varphi}{2}
\end{aligned}
$$

Die zweite Beziehung erlaubt, die Terme $1/\varphi$ in B_1 zum Verschwinden zu bringen. Die letzten zwei Beziehungen sind die Reziproken der Pivot-Elemente, die bei der Durchführung des Gauß-Algorithmus zur Berechnung der Inversen auftreten. In der nachfolgenden Rechnung werden nach jedem Schritt φ^2 durch $\varphi + 1$ ersetzt:

$$
\begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & \varphi & 1/\varphi & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1/\varphi & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \varphi & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}
\rightarrow
\begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & \varphi & \varphi-1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\varphi+1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \varphi & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}
$$

$$
\rightarrow
\begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & \varphi & \varphi-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2\varphi & 1-\varphi & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\varphi & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}
$$

$$
\rightarrow
\begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & \varphi & \varphi-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (3-\varphi)/5 & (2\varphi-1)/5 & (1-2\varphi)/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2(\varphi+2)/5 & (\varphi-3)/5 & (\varphi+2)/5 & 1 \\ \hline \end{array}
$$

$$
\rightarrow
\begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & \varphi & \varphi-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (3-\varphi)/5 & (2\varphi-1)/5 & (1-2\varphi)/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \varphi/2-1 & -\frac{1}{2} & (3-\varphi)/2 \\ \hline \end{array}
$$

$$
\rightarrow
\begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & \varphi & 0 & (2\varphi-1)/2 & (\varphi-1)/2 & (4-3\varphi)/2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & (1-\varphi)/2 & (\varphi-2)/2 \\ 0 & 0 & 1 & \varphi/2-1 & -\frac{1}{2} & (3-\varphi)/2 \\ \hline \end{array}
$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & (\varphi-1)/2 & \varphi/2 & (3-2\varphi)/2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & (1-\varphi)/2 & (\varphi-2)/2 \\ 0 & 0 & 1 & \varphi/2-1 & -\frac{1}{2} & (3-\varphi)/2 \end{array}\right]$$

Wir lesen ab

$$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} (\varphi-1)/2 & \varphi/2 & (3-2\varphi)/2 \\ \frac{1}{2} & (1-\varphi)/2 & (\varphi-2)/2 \\ (\varphi-2)/2 & -\frac{1}{2} & (3-\varphi)/2 \end{pmatrix}.$$

Die Drehmatrix ist

$$R = B_2 B_1^{-1} = \begin{pmatrix} (\varphi-1)/2 & \varphi/2 & -\frac{1}{2} \\ -\varphi/2 & \frac{1}{2} & (\varphi-1)/2 \\ \frac{1}{2} & (\varphi-1)/2 & \varphi/2 \end{pmatrix}.$$

Um den Drehwinkel zu bestimmen, wenden wir die Spurformel auf R an:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\varphi-1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \Rightarrow \qquad \alpha &= 72^\circ. \end{aligned}$$

9.4. Sei A die Matrix

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Ist A orthogonal?

b) Zeigen Sie: A ist keine Drehmatrix.

c) Finden Sie die Matrix S einer Spiegelung an der x-y-Ebene.

d) Berechnen Sie AS.

e) Zeigen Sie: AS ist eine Drehmatrix.

f) Bestimmen Sie den Drehwinkel von AS.

Lösung. a) $A^t A = I$ durch nachrechnen, also ist A orthogonal.

b) $\det(A) = -1$, eine Drehmatrix hätte $\det(A) = 1$.

c) Die Matrix S ist

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

sie ist orthogonal und $\det(S) = -1$.

d)
$$AS = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e) AS ist als Produkt orthogonaler Matrizen auch orthogonal, und $\det(AS) = \det(A)\det(S) = (-1)\cdot(-1) = 1$.

f) Den Drehwinkel kann man mit der Spurformel ermitteln:

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2} = \frac{\frac{1}{3}6 - 1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\alpha = 60^\circ$$

○