Lösungen zu den Übungsaufgaben im Buch *Lineare Algebra: Eine anwendungsorientierte Einführung* von Andreas Müller, ISBN 978-3-662-67865-7, https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-67866-4, Website zum Buch: https://linalg.ch

Kapitel 10: Projektive Geometrie

10.1. Eine Kamera soll im Punkt $C = (5, 1, 3)$ montiert werden und den Punkt $A = (3, -5, -6)$ beobachten. Sie soll so orientiert sein, dass die horizontale Chipkante auch im Raum horizontal liegt. Finden Sie zu diesem Zweck orthonormierte Vektoren $\vec{b}_i$ derart, dass $\vec{b}_1$ von C aus auf den Punkt A zeigt, $\vec{b}_2$ horizontal ist, also senkrecht auf die Vertikale, und $\vec{b}_3$ zusammen mit $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ ein Rechtssystem bildet.

Lösung. Der Vektor $\vec{b}_1$ ist der normierte Vektor

$$\vec{a}_1 = \vec{a} - \vec{c} = \begin{pmatrix}3\\-5\\-6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-6\\-9\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad |\vec{a}_1| = \sqrt{4+36+81} = 11 \quad\Rightarrow\quad \vec{b}_1 = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}-2\\-6\\-9\end{pmatrix}.$$

Der Vektor b_2 soll senkrecht stehen auf $\vec{e}_3$ und $\vec{b}_1$. Ein solcher wird durch das Vektorprodukt

$$\vec{a}_2 = \vec{b}_1 \times \vec{e}_3 = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}-2\\-6\\-9\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}-6\\2\\0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad |\vec{a}_2| = \frac{2\sqrt{10}}{11} \quad\Rightarrow\quad \vec{b}_2 = \frac{\vec{a}_2}{|\vec{a}_2|} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Schließlich müssen $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ und $\vec{b}_3$ ein Rechtssystem bilden, also können wir

$$\vec{b}_3 = \vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}-2\\-6\\-9\end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{11\sqrt{10}}\begin{pmatrix}9\\27\\-20\end{pmatrix}$$

verwenden.

Diese Aufgabe kann auch mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens gelöst werden. Man muss dabei allerdings beachten, dass die Orthonormalisierung eines horizontalen Vektors, z. B. $\vec{e}_1$ und $\vec{b}_1$ einen Vektor in der von den beiden Vektoren aufgespannten Ebene ergibt, der insbesondere nicht mehr horizontal zu sein braucht, weil ja $\vec{b}_1$ nach unten zeigt. Das spielt allerdings keine Rolle beim dritten Vektor, der ja nur in der Ebene von $\vec{b}_1$ und der Vertikalen $\vec{e}_3$ liegen muss. Die gesuchten Vektoren kann man also bekommen, indem man

$$\vec{a}_1 = \vec{a} - \vec{c} = \begin{pmatrix}-2\\-6\\-9\end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \vec{e}_3, \qquad \text{und} \qquad \vec{a}_3 = \vec{e}_1$$

in dieser Reihenfolge orthonormiert. Der Vektor $\vec{b}_1$ wird natürlich derselbe sein. Die anderen Vektoren entstehen in der Reihenfolge $\vec{b}_3$ und $\vec{b}_2$. Es ist aber noch nicht sichergestellt, dass die Vektoren auch ein Rechtssystem bilden, das muss man also mit der Determinanten ebenfalls noch nachprüfen. Sollten die Vektoren nicht orthonormiert sein, kann man von $\vec{b}_2$ oder $\vec{b}_3$ das Vorzeichen kehren, am besten so, dass $\vec{b}_3$ nach oben zeigt. Die Details dieser Rechnung sind dem Leser überlassen. ○

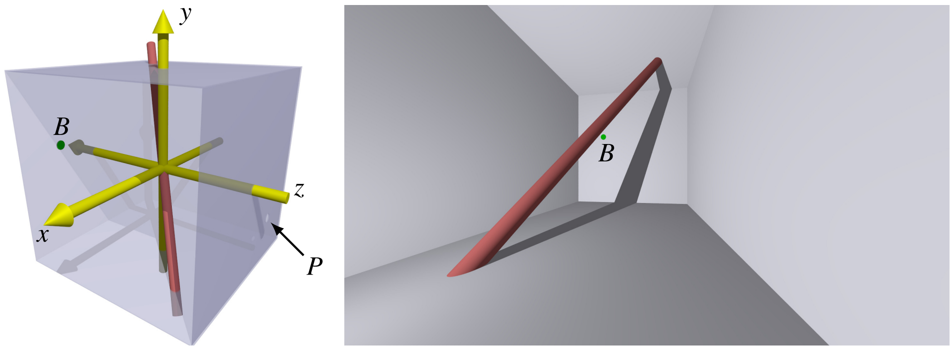

Abbildung 1: Darstellung der Raumsituation aus Aufgabe 10.2.

10.2. Wir betrachten den würfelförmigen Hohlraum mit Ecken $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ (Abbildung 10.16 links). Im Inneren befindet sich ein gerades Rohr mit Durchmesser 0.1 zwischen den Punkten $(0.5, -1, -0.5)$ und $(-0.5, 1, 0.5)$. Nun soll ein weiteres Rohr mit dem gleichen Durchmesser installiert werden. Es soll durch eine Öffnung im Punkt $P = (-0.5, -0.5, -1)$ eingeführt werden und muss einen Punkt an der Rückwand ($z = 1$) erreichen, welcher aber von außen nicht erkennbar ist. Daher wird eine Kamera mit einem 320×180-Chip und Brennweite $f = 50$ in der Öffnung bei P platziert. Auf dem Kamerabild (Abbildung 10.16 rechts) hat der Zielpunkt die Koordinaten $B = (179, 109)$. Die Ausrichtung der Kamera wird durch die Drehmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 0.99504 & 0.00000 & -0.09950 \\ 0.00000 & 1.00000 & 0.00000 \\ 0.09950 & 0.00000 & 0.99504 \end{pmatrix}$$

gegeben. Kann das neue Rohr installiert werden, ohne vom bereits vorhandenen Rohr blockiert zu werden?

Lösung. Das bestehende Rohr hat die Geradengleichung in Parameterdarstellung

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + t\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \\ -0.5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Achse des neuen Rohrs ist eine Gerade durch den Punkt P, beziehungsweise das Kamerazentrum mit Ortsvektor

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Der Richtungsvektor ist $\vec{r}$. Er muss aus dem Bildpunkt B bestimmt werden.

Die Kameramatrix kann aus den gegebenen Daten abgelesen werden, sie ist

$$K = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 160 \\ 0 & 50 & 90 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Gleichungen der Kamerageometrie liefern den Richtungsvektor

$$\vec{r} = (KD)^{-1}\begin{pmatrix}179\\109\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.47761\\0.38000\\0.95723\end{pmatrix}.$$

Ob sich das neue Rohr installieren lässt hängt davon ab, ob die beiden Geraden einen windschiefen Abstand ≥ 0.1 haben. Dafür können wir die Abstandsformel für den windschiefen Abstand

$$d = \frac{(\vec{r}\times\vec{r}_0)\cdot(\vec{c}-\vec{p}_0)}{|\vec{r}\times\vec{r}_0|}$$

verwenden. Die Rechnung ergibt

$$|d| = 0.060027 < 0.1,$$

das Rohr lässt sich also nicht installieren, weil der windschiefe Abstand zu klein ist. ○

10.3. Von einer Kamera soll die Kameramatrix

$$K = \begin{pmatrix} f & 0 & m_x\\ 0 & f & m_y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

bestimmt werden. Zu diesem Zweck wird die Kamera im Nullpunkt des Koordinatensystems so montiert, dass sie genau in Richtung der z-Achse blickt ($D = E$). In dieser Situation werden die Punkte

$$P_1 = (1, 2, 10) \quad\text{und}\quad P_2 = (-2, -1, 12)$$

im dreidimensionalen Raum auf die Punkte

$$B_1 = (91, 62) \quad\text{und}\quad B_2 = (88, 59)$$

auf dem Chip abgebildet. Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit welchem die Matrix K bestimmt werden kann. Ihre Methode sollte erweiterbar sein, sodass sie auch mit mehr als zwei Punkten noch funktioniert.

Lösung. Die Theorie der Kamerabbildung sagt, dass ein Punkt des dreidmensionalen Raumes wie folgt abgebildet wird. Zunächst muss man den Ortsvektor $\vec{p}$ in einen vierdimensionalen Vektor $\tilde{p}$ in homogenen Koordinaten umwandeln, indem man eine 1 anhängt. Auf $\tilde{p}$ wendet man dann erst $\begin{pmatrix} E & -c\end{pmatrix}$, dann D und schließlich K an, um den Bildpunkt $\tilde{b}$ in homogenen Koordinaten zu erhalten. Da aber $D = E$ und $c = 0$ (die Kamera ist im Nullpunkt $c = 0$ montiert) ist, bleibt nur noch

$$\tilde{b} = K\vec{p}.$$

Wendet man die Matrix

$$K = \begin{pmatrix} f & 0 & m_x\\ 0 & f & m_y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

auf den Punkt P an, erhält man die Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcrcl} fp_1 & & & + & m_x\cdot p_3 & = & \tilde{b}_1\\ & & fp_2 & + & m_y\cdot p_3 & = & \tilde{b}_2\\ & & & & p_3 & = & \tilde{b}_3 \end{array} \tag{1}$$

In der Aufgabenstellung sind die Punkte B nicht in homogenen Koordinaten gegeben, sondern in gewöhnlichen Koordinaten. Für die Gleichungen (**??**) brauchen wir aber homogene Koordinaten $\tilde{b}$ und zwar so, dass $\tilde{b}_3 = p_3$ ist. Wir erreichen dies, indem wir mit p_3 multipizieren:

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \end{pmatrix} = p_3 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \tilde{b}_1 = p_3 b_1 \\ \tilde{b}_2 = p_3 b_2 \end{cases}$$

Damit können wir jetzt die endgültigen Gleichungen hinschreiben:

$$\begin{array}{rcrcrcl} f p_1 & + & m_x \cdot p_3 & & & = & p_3 b_1 \\ f p_2 & & & + & m_y \cdot p_3 & = & p_3 b_2 \end{array} \tag{2}$$

Jetzt können wir das Gauß-Tableau für die Bestimmung von f, m_x und m_y aufstellen:

f	m_x	m_y	
p_1	p_3	0	$p_3 b_1$
p_2	0	p_3	$p_3 b_2$

Dies wiederholen wir für alle gegebenen Punkte und erhalten so das Tableau

f	m_x	m_y	
1	10	0	910
2	0	10	620
−2	12	0	1056
−1	0	12	708

Dieses überbestimmte Gleichungssystem $Ax = d$ kann nach dem Standardverfahren gelöst werden, indem man das Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix

$$A^t A = \begin{pmatrix} 10 & -14 & 8 \\ -14 & 244 & 0 \\ 8 & 0 & 244 \end{pmatrix}$$

und rechter Seite

$$A^t d = \begin{pmatrix} -670 \\ 21772 \\ 14696 \end{pmatrix}$$

löst. Die Lösung ist

$$\begin{aligned} f &= 10.899, \\ m_x &= 89.855 \qquad \text{und} \\ m_y &= 59.872, \end{aligned}$$

was ziemlich nahe bei den wahren Parametern $f = 10$, $m_x = 90$ und $m_y = 60$ ist. ○

10.4. Am 21. Dezember 2020 kam es zu einer "großen Konjuktion" zwischen den Planeten Jupiter und Saturn, sie kamen sich bis auf 6 Winkelminuten nahe, das entspricht etwa einem Fünftel des Vollmonddurchmessers. Bei dieser Gelegenheit konnte man auch mit einem stark vergrößernden

Teleskop beide Planeten gleichzeitig im Gesichtsfeld des Teleskops sehen. Die Beobachtung war allerdings nicht ganz einfach, weil beide Planeten sehr tief am Himmel standen.

In einem Koordinatensystem, dessen Nullpunkt in der Sonne liegt, waren die Planeten zum Beobachtungszeitpunkt an den Positionen

$$\vec{p}_{♃} = \begin{pmatrix} 3.001 \\ -4.122 \\ -0.049 \end{pmatrix}, \qquad \vec{p}_{♄} = \begin{pmatrix} 5.488 \\ -8.345 \\ -0.071 \end{pmatrix}, \qquad \vec{p}_{♁} = \begin{pmatrix} -0.0057 \\ 0.9836 \\ 0.0000 \end{pmatrix}$$

in sogenannten heliozentrischen Koordinaten, die die astronomische Einheit, den mittleren Abstand von Sonne und Erde als Einheit verwenden. Darin steht ♃ für Jupiter, ♄ für Saturn und ♁ für die Erde.

Auf der Erde befindet sich eine Kamera mit einem Chip von 3600×2400 Pixeln und einem Teleskop mit 100000 Pixeln Brennweite als Objektiv. Diese Brennweite entspricht bei einer handelsüblichen Spiegelreflexkamera etwa einer Objektivbrennweite von 150mm.

Die Ausrichtung der Kamera wird durch die Drehmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 0.7481 & 0.4364 & 0.5000 \\ -0.4277 & -0.2591 & 0.8660 \\ 0.5074 & -0.8617 & -0.0072 \end{pmatrix}$$

beschrieben.

a) Finden Sie die Pixelkoordinaten von Jupiter und Saturn auf dem Chip.

b) Wie weit auseinander in Pixeln befinden sich die Bilder von Jupiter und Saturn?

Lösung. Die Kameramatrix ist

$$K = \begin{pmatrix} f & 0 & w/2 \\ 0 & f & h/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100000 & & 1800 \\ & 100000 & 1200 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das Kamerazentrum ist die Position der Erde, also $\vec{c} = \vec{p}_{♁}$. Damit kann man jetzt die Kameraprojektionsmatrix

$$P = KD\begin{pmatrix} E & -\vec{p}_{♁} \end{pmatrix}$$

konstruieren. Die homogenen Koorindaten $\tilde{p}_*$ konstruiert man, indem man den Vektoren $\vec{p}_*$ eine vierte Komponente mit Wert 1 hinzufügen. Damit finden wir dann die homogenen Chipkoordinaten

$$\tilde{v}_* = P\tilde{p}_*.$$

a) Die Berechnung ergibt

$$\tilde{b}_{♃} = \begin{pmatrix} 10338.64922 \\ 6556.67448 \\ 5.92545 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{b}_{♃} = \begin{pmatrix} 1744.8 \\ 1106.5 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}_{♄} = \begin{pmatrix} 19821.23756 \\ 13581.64004 \\ 10.82647 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{b}_{♄} = \begin{pmatrix} 1830.8 \\ 1254.5 \end{pmatrix}$$

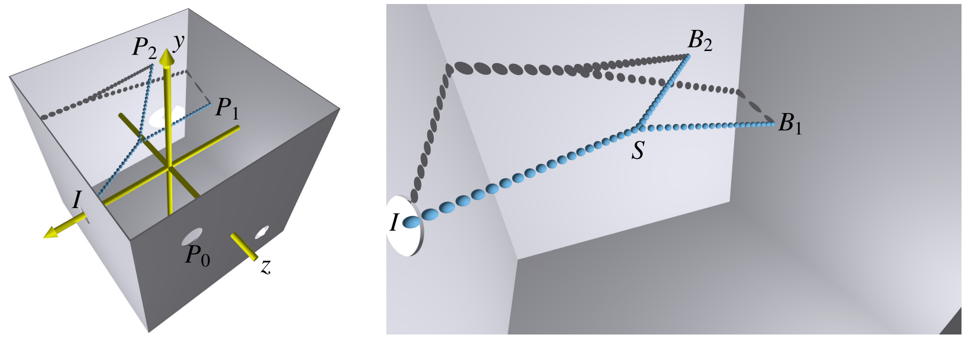

Abbildung 2: Blasenkammer aus Aufgabe 10.5.

b) Die Distanz zwischen den beiden Bildern auf dem Chip ist

$$|\vec{b}_{♃} - \vec{b}_{♄}| = \left|\begin{pmatrix}-86.025\\-147.957\end{pmatrix}\right| = 171.15.$$

Damit kann man auch den Winkel δ zwischen den beiden Punkten berechnen, man erhält

$$\tan\alpha \approx \frac{171.15}{f} = 0.00171 \qquad\Rightarrow\qquad \alpha\approx\delta = 0.098^\circ \approx 6'.$$

Dies passt zur Beschreibung der beobachteten Konjunktion. ○

10.5. Eine sogenannte Blasenkammer kann dazu verwendet werden, die Bahnen subatomarer Teilchen sichtbar zu machen. Sie funktioniert wie folgt. In eine mit flüssigem Wasserstoff gefüllte Kammer werden Elementarteilchen injiziert. Kurz zuvor wird der Druck stark reduziert, so dass die Temperatur der Flüssigkeit jetzt über dem Siedepunkt liegt. Die Teilchen ionisieren einzelne Wasserstoff-Moleküle, welche als Keime für Gasblasen dienen. Wenige Millisekunden später werden die Gasblasen mit Blitzlicht sichtbar gemacht und mit mehreren Kameras aufgenommen. Am CERN in Genf wurde 1973 mit der großen Blasenkammer *Gargamelle* das Z-Boson nachgewiesen.

Eine Kamera mit einem 320×180-Chip und Brennweite $f = 135$ beobachtet eine würfelförmige Blasenkammer (Abbildung 10.17 links) mit den Ecken $(\pm1,\pm1,\pm1)$ von einem Beobachtungsfenster im Punkt $P_0 = (0.5, 0.5, -1)$ aus und hat die Aufnahme in Abbildung 10.17 rechts gemacht. Ein Teilchen tritt beim Punkt $I = (1,0,0)$ in die Kammer ein. Beim Punkt $S = (\frac18, \frac18, \frac38)$ zerfällt es. Auf der Aufnahme sind zwei Spuren zu sehen, die bei den Pixelkoordinaten $B_1 = (204, 114)$ und $B_2 = (160, 150)$ enden, weil dort die Teilchen die Kammer verlassen. Die Orientierung der Kamera wird durch die Drehmatrix

$$D = \begin{pmatrix}0.894 & 0.000 & 0.447\\ 0.183 & -0.913 & -0.365\\ 0.408 & 0.408 & -0.816\end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Austrittspunkte P_1 und P_2 der Teilchen.

b) Ein Physiker will wissen, welchen Winkel die Bahnen der Zerfallsprodukte einschließen. Berechnen Sie den Winkel $\angle P_1 S P_2$.

Lösung. a) Die Kameramatrix K kann aus den Aufgabendaten abgelesen werden, sie ist

$$K = \begin{pmatrix} 135 & 0 & 160 \\ 0 & 135 & 90 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zunächst müssen wir aus den Punkten B_i dreidimensionale Vektoren in homogenen Koordinaten machen, also

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 204 \\ 114 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 160 \\ 150 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit der Formel $\vec{r} = (KD)^{-1}\vec{b}$ können wir zu jedem Punkt P_i den Richtungsvektor

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0.73258 \\ 0.24636 \\ -0.73602 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0.48963 \\ 0.00283 \\ -0.97926 \end{pmatrix}$$

der Geraden von der Kamera in P_0 aus zum Punkt P_i berechnen.

Der Punkt P_1 liegt auf der Ebene mit $x = -1$ und er erfüllt die Gleichung $\vec{p}_1 = \vec{p}_0 + t\vec{r}_1$. Wir kennen die x-Koordinate von $\vec{p}_0$, sie ist 0.5. Die x-Koordinate muss daher die Gleichung

$$0.5 + t \cdot 0.73258 = -1 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{-1.5}{0.73258} = -2.0476.$$

Analog gilt $\vec{p}_2 = \vec{p}_0 + s\vec{r}_2$. Die z-Koordinate davon ist

$$1 = -1 + s \cdot (-0.97926) \qquad \Rightarrow \qquad s = \frac{2}{-0.97926} = -2.0424.$$

Einsetzen der Werte für t und s ergibt

$$P_1 = (-1, -0.004, -0.507) \quad \text{und} \quad P_2 = (-0.5, 0.494, 1)$$

für die gesuchten Punkte.

b) Der Winkel kann mit der Zwischenwinkelformel berechnet werden. Es gilt

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{SP_1} \cdot \overrightarrow{SP_2}}{|\overrightarrow{SP_1}| \cdot |\overrightarrow{SP_2}|} = \frac{0.73786}{1.1401 \cdot 0.9579} = 0.67564,$$
$$\Rightarrow \qquad \alpha = 47.496^\circ.$$

○

Diskussion. Man kann die Punkte P_i natürlich auch mit der konventionellen Methode als Durchstosspunkte der Geraden $\vec{p}_0 + t\vec{r}_i$ mit einer der Seitenebenen der Kammer berechnen. Für P_1 verwendet man die Ebenengleichung $x = -1$ und für P_2 die Ebenengleichung $z = 1$. So entstehen die Gleichungssysteme

x	y	z	t	
1	0	0	−0.73258	0.5
0	1	0	−0.24636	0.5
0	0	1	0.73602	−1
1	0	0	0.00000	−1

x	y	z	s	
1	0	0	−0.48963	0.5
0	1	0	−0.00283	0.5
0	0	1	0.97926	−1
0	0	1	0.00000	1

mit den Lösungen

x	y	z	t	
1	0	0	0	−1.00000
0	1	0	0	−0.00444
0	0	1	0	0.50704
0	0	0	1	−2.04756

x	y	z	s	
1	0	0	0	−0.50000
0	1	0	0	0.49422
0	0	1	0	1.00000
0	0	0	1	−2.04236

in Übereinstimmung mit den oben gefundenen Daten.

10.6. Zwei Kameras mit Brennweite $f = 100$ Pixel und einem 120×90-Chip sind in den Punkten $C_1 = (100, 0, 0)$ und $C_2 = (0, 100, 0)$ platziert und mit den Drehmatrizen

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ausgerichtet. Ein Punkt Q wird von den Kameras auf die Bildpunkte $B_1 = (36, 40)$ und $B_2 = (65, 58)$ abgebildet. Bestimmen Sie den Punkt Q.

Lösung. Jedes Kamerabild definiert eine Gerade, auf der sich der Punkt Q befinden muss. Wir berechnen daher erst die Geraden und daraus deren Schnittpunkt. Die Stützvektoren sind $\vec{c}_1$ und $\vec{c}_2$, die Richtungsvektoren $\vec{r}_i = (KD)^{-1}\tilde{b}_i$. Wir brauchen daher zuerst

$$K = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 60 \\ 0 & 100 & 45 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Richtungsvektoren ergibt die Rechnung

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -1.00 \\ 0.24 \\ -0.05 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0.13 \\ -1.00 \\ -0.05 \end{pmatrix}.$$

Die Geradengleichungen sind folglich

$$\vec{p}_1 = \vec{c}_1 + t\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1.00 \\ 0.24 \\ -0.05 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{p}_2 = \vec{c}_2 + s\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0.13 \\ -1.00 \\ -0.05 \end{pmatrix}.$$

Der Schnittpunkt sollte als Lösung des folgenden Gleichungssystems gefunden werden können:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.24 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.05 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -0.13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Leider schneiden sich die Geraden im Allgemeinen aber nicht, weshalb das Gleichungssystems keine Lösung hat. Stattdessen suchen wir eine Lösung im Sinne der kleinsten Quadrate, also die Lösung des Gleichungssystems

$$A^t A\vec{x} = A^t\vec{b} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.24 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.05 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -0.13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.05 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Rechnung ergibt

$$\vec{x} = (A^t A)^{-1} A^t\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & -0.13 \\ 0 & 2 & 0 & -0.24 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0.05 & 0.05 \\ 1 & -0.24 & 0.05 & 1.0601 & 0 \\ -0.13 & 1 & 0.05 & 0 & 1.0194 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 0 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.2218 \\ 21.5260 \\ -4.2063 \\ 89.7602 \\ 78.4904 \end{pmatrix},$$

woraus die Koordinaten des gesuchten Punkts $Q = (10.2218, 21.5260, -4.2063)$ abgelesen werden können. ○