Lösungen zu den Übungsaufgaben im Buch *Lineare Algebra: Eine anwendungsorientierte Einführung* von Andreas Müller, ISBN 978-3-662-67865-7, https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-67866-4, Website zum Buch: https://linalg.ch

Kapitel 11: Eigenwerte und Eigenvektoren

11.1. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= -(1-\lambda)^2\lambda - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\
&= -(1-\lambda)^2\lambda - 2(1-\lambda) \\
&= (1-\lambda)(-\lambda(1-\lambda) - 2) \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) \\
&= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)
\end{aligned}$$

Dieses Polynom hat die Nullstellen $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$. Für jeden dieser Werte müssen jetzt auch noch Eigenvektoren gefunden werden.

Für $\lambda_1 = -1$ muss das Gleichungssystem $(A - \lambda_1 I)v_1 = (A + I)v_1 = 0$ gelöst werden :

$$\begin{array}{|ccc|c|} \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|ccc|c|} \hline 1 & \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|ccc|c|} \hline 1 & \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|ccc|c|} \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}.$$

Die dritte Variable ist frei wählbar, man kann sie zum Beispiel willkürlich auf 1 festlegen, und erhält als Eigenvektor

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich ergibt

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -v_1,$$

v_1 ist also wirklich ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$.

Analog kann man Eigenvektoren für die anderen Eigenwerte finden. Für $\lambda_2 = 1$ gilt

$$\begin{array}{|ccc|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|ccc|c|} \hline 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|ccc|c|} \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array},$$

was auf den Eigenvektor

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

führt.

Oder für $\lambda_3 = 2$ findet man das Gleichungssystem

$$\begin{array}{|rrr|r|}\hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|rrr|r|}\hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|rrr|r|}\hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|rrr|r|}\hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

mit dem Eigenvektor

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

○

11.2. Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}.$$

Lösung. Das charakteristische Polynom ist

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & & & \\ & a-\lambda & 1 & & \\ & & a-\lambda & & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & a-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)^n.$$

Dieses Polynom hat nur die n-fache Nullstelle a. Eigenvektoren sind Lösungen des homogenen Gleichungssystems mit der Koeffizienten-Matrix

$$B = A - aI = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssystem kann dadurch gelöst werden, dass die letzte Spalte ganz nach rechts permuttiert wird. Dann ist das Gauß-Tableau

$$
\begin{array}{|cccccc|}
\hline
x_1 & x_2 & x_3 & & x_{n-1} & x_n \\
\hline
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{|cccccc|}
\hline
x_2 & x_3 & & x_{n-1} & x_n & x_1 \\
\hline
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Daraus liest man ab, dass x_1 frei wählbar ist, dass aber aber alle anderen Unbekannten auf $x_2 = x_3 = \dots = x_{n-1} = x_n = 0$ festgelegt sind. e_1 und seine Vielfachen sind also die einzigen Eigenvektoren von A. ○

11.3. Berechnen Sie $A^{47}e_1$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Die Wirkung von A auf Eigenvektoren ist einfach zu ermitteln, denn es gilt $Av_\pm = \lambda_\pm v_\pm$. Das charakteristische Polynom ist

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} &= (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \\
\lambda_\pm &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 8}}{2} = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1.
\end{aligned}
$$

Für die Eigenwert $\lambda_+ = 4$ und $\lambda_- = 2$ ergeben sich die Eigenvektoren

$$v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Damit kann man A^{47} nun berechnen als

$$
\begin{aligned}
A^{47} = T^{-1}(A')^{47}T &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^{47} & 0 \\ 0 & 2^{47} \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^{47} & 4^{47} \\ 2^{47} & -2^{47} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4^{47}+2^{47} & 4^{47}-2^{47} \\ 4^{47}-2^{47} & 4^{47}+2^{47} \end{pmatrix} \\
&= \frac{2^{47}}{2}\begin{pmatrix} 2^{47}+1 & 2^{47}-1 \\ 2^{47}-1 & 2^{47}+1 \end{pmatrix} = 2^{46}\begin{pmatrix} 2^{47}+1 & 2^{47}-1 \\ 2^{47}-1 & 2^{47}+1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

und $A^{47}e_1$ bestimmen

$$A^{47}e_1 = 2^{46}\begin{pmatrix} 2^{47}+1 & 2^{47}-1 \\ 2^{47}-1 & 2^{47}+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2^{46}\begin{pmatrix} 2^{47}+1 \\ 2^{47}-1 \end{pmatrix}.$$

Alternativ hätte man auch e_1 durch die beiden Vektoren v_+ und v_- ausdrücken können durch

$$e_1 = \frac{1}{2}(v_+ + v_-)$$

und damit $A^{47}e_1$ ausrechnen als

$$A^{47}e_1 = \frac{1}{2}(A^{47}v_+ + A^{47}v_-) = \frac{1}{2}(\lambda_+^{47}v_+ + \lambda_-^{47}v_-) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4^{47}+2^{47}\\4^{47}-2^{47}\end{pmatrix} = \frac{2^{47}}{2}\begin{pmatrix}2^{47}+1\\2^{47}-1\end{pmatrix} = 2^{46}\begin{pmatrix}2^{47}+1\\2^{47}-1\end{pmatrix}.$$ ○

11.4. Ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix}\pi & 0 & 0\\0 & \pi & 1\\0 & 0 & \pi\end{pmatrix}$$

diagonalisierbar?

Lösung. Die Matrix A hat das charakteristische Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix}\pi-\lambda & 0 & 0\\0 & \pi-\lambda & 1\\0 & 0 & \pi-\lambda\end{vmatrix} = (\pi-\lambda)^3$$

mit der dreifachen Nullstelle π. Es gibt also nur einen Eigenwert $\lambda = \pi$. Um die Eigenvektoren zu finden, muss man den Gauss-Algorithmus auf $A - \pi I$ anwenden:

$$\boxed{\begin{matrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{matrix}} \rightarrow \boxed{\begin{matrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix}}$$

Daraus liest man ab, dass die ersten beiden Variablen frei wählbar sind, und dass die dritte Variable immer verschwindet. Man findet also die folgenden zwei möglichen Eigenvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Natürlich sind auch alle Linearkombinationen davon Eigenvektoren von A. Allerdings bilden die Eigenvektoren keine Basis von $\mathbb{R}^3$, die Matrix A ist also nicht diagonalisierbar. ○

11.5. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix}-a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_2 & -a_1 & -a_0\\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ & 1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & 0 & & \\ & & & & 1 & 0 & \\ & & & & & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Hinweis. Entwicklung nach der letzten Spalte.

Lösung. Es ist die Determinanten

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -a_{n-1}-\lambda & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_2 & -a_1 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\lambda & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & -\lambda & & \\ & & & & 1 & -\lambda & \\ & & & & & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Schreiben wir A_k für eine $k\times k$-Matrix mit der selben Struktur wie A, also zum Beispiel auch $A = A_n$, dann finden wir für $n = 1$ und $n = 2$ die charakteristischen Polynome

$$\chi_{A_1}(\lambda) = -a_0 - \lambda = -(\lambda + a_0), \tag{1}$$

$$\chi_{A_2}(\lambda) = \begin{vmatrix} -a_1-\lambda & -a_0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0. \tag{2}$$

Daraus und aus dem Resultat von Aufgabe **??** gewinnen wir die Vermutung, dass

$$\chi_{A_k}(\lambda) = (-1)^k(\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + a_{k-2}\lambda^{k-2} + \dots a_1\lambda + a_0)$$

gilt.

Die Vermutung kann mit vollständiger Induktion bewiesen werden. Die Formeln (**??**) und (**??**) dienen als Induktionsverankerung.

Für den Induktionsschritt dürfen wir annehmen, dass die Formel bereits für $n-1$ bewiesen ist, und müssen Sie für den Fall n beweisen. Der Entwicklungssatz liefert

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= (-1)^{n-1}(-a_0)\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & 1 & -\lambda & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & -\lambda & \\ & & & & 1 & -\lambda \\ & & & & & 1 \end{vmatrix} + (-\lambda)\begin{vmatrix} -a_{n-1}-\lambda & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_2 & -a_1 \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & 1 & -\lambda & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & -\lambda & \\ & & & & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n a_0 + (-\lambda)\det(A_{n-1} - \lambda I) \\ &= (-1)^n a_0 - \lambda(-1)^{n-1}(\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + a_{n-2}\lambda^{n-3} + \dots + a_2\lambda + a_1) \\ &= (-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0).\end{aligned}$$

Damit ist die Vermutung auch für den Fall n bewiesen. Insbesondere kann jedes beliebige Polynom mit Leitkoeffizient 1 als charakteristisches Polynom einer Matrix auftreten. ○

11.6. Die Folge

$$0,\ 1,\ 5,\ 19,\ 65,\ 211,\ 665,\ 2059,\ 6305,\ \dots$$

ist durch die Rekursionsformel

$$x_{n+1} = 5x_n - 6x_{n-1}$$

mit den Anfangswerten

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = 1$$

definiert. Finden Sie eine Formel für x_n.

Lösung. Die Rekursionsformel kann in vektorieller Form als

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

geschrieben werden. Die Matrix A hat das charakteristische Polynom

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(5-\lambda)\lambda + 6 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$$

mit den Nullstellen 2 und 3. Die Eigenvektoren finden wir wie folgt. Für $\lambda_1 = 2$:

$$\boxed{\begin{matrix} 5-\lambda & -6 \\ 1 & -\lambda \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{matrix}} \to \boxed{\begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für $\lambda_2 = 3$:

$$\boxed{\begin{matrix} 5-\lambda & -6 \\ 1 & -\lambda \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{matrix}} \to \boxed{\begin{matrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für die Umrechnung in die Eigenbasis brauchen wir die Matrizen T und T^{-1}. Die Matrix T rechnet in die Eigenbasis um, sie hat also die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Nachrechnen kann man auch kontrollieren, dass

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

tatsächlich eine Diagonalmatrix ist. Zur Berechnung der Potenzen auf dem Startvektor verwenden wir jetzt die Gleichung

$$\begin{aligned} TAT^{-1} = A' \qquad \Rightarrow \qquad A^k v_0 = T^{-1}A'^k T v_0 &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2^k \\ 3^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2^{k+1} + 3^{k+1} \\ -2^k + 3^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus kann man die Lösung als zweite Komponenten ablesen:

$$x_n = f(n) = -2^n + 3^n.$$

Wir kontrollieren das Resultat durch Ausrechnen einiger Werte:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_n	0	1	5	19	65	211	665	2059	6305
$3^n - 2^n$	0	1	5	19	65	211	665	2059	6305

○

11.7. Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3-s & 1 \\ -s^2 & s+3 \end{pmatrix}$$

mit $s \neq 0$.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

b) Finden Sie so viele linear unabhängige Eigenvektoren wie möglich.

c) Ist die Matrix diagonalisierbar?

Lösung. a) Wir berechnen das charakteristische Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-s-\lambda & 1 \\ -s^2 & s+3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda+s)(3-\lambda-s) + s^2 = (3-\lambda)^2 - s^2 + s^2 = (\lambda-3)^2.$$

Die Eigenwerte sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms, also Lösungen der Gleichung $\chi_A(\lambda) = (\lambda-3)^2 = 0$. $\lambda = 3$ ist eine doppelte Nullstelle, dies ist also der einzige Eigenwert.

b) Für die Eigenvektoren müssen wir das homogene Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix $A - 3I$ mit dem Gauß-Algorithmus lösen:

$$\begin{array}{|cc|c|} \hline 3-s-\lambda & 1 & 0 \\ -s^2 & s+3-\lambda & 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|cc|c|} \hline -s & 1 & 0 \\ -s^2 & s & 0 \\ \hline \end{array}$$
$$\rightarrow \begin{array}{|cc|c|} \hline 1 & -\frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Die Division durch das Pivot-Element $-s$ im ersten Schritt ist möglich, weil $s \neq 0$ in der Aufgabenstellung vorausgesetzt war. Die zweite Variable ist frei wählbar, zum Beispiel könnten wir den Wert s wählen. Dann wird ein möglicher Eigenvektor:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}.$$

Alle anderen Eigenvektoren sind davon linear abhängig.

Kontrolle:

$$Av = \begin{pmatrix} 3-s & 1 \\ -s^2 & s+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3-s)+s \\ -s^2+(s+3)s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3s \end{pmatrix} = 3v.$$

c) Da der Eigenraum von $\lambda = 3$ nur eindimensional ist, gibt es keine Basis aus Eigenvektoren und die Matrix A ist daher nicht diagonalisierbar. ○