Lösungen zu den Übungsaufgaben im Buch *Lineare Algebra: Eine anwendungsorientierte Einführung* von Andreas Müller, ISBN 978-3-662-67865-7, https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-67866-4, Website zum Buch: https://linalg.ch

Kapitel 12: Matrixzerlegungen

12.1. Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

a) Finden Sie die LU-Zerlegung von A.

b) Berechnen Sie $\det(A)$.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ly = b$.

d) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ux = y$.

Lösung. a) Die LU-Zerlegung wird mit dem Gauß-Algorithmus gefunden

$$\begin{array}{|ccc|}\hline 2 & 8 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Im Tableau ganz rechts steht U, die Pivotspalten bilden L, also

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kontrolle:

$$LU = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = A.$$

b) $\det(A) = \det(L)\det(U) = \det(L) = 4$.

c) Es ist $Ly = b$ zu lösen. Da L eine Dreicksmatrix ist, kann man die y direkt bestimmen

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2y_1 & & & & & = & 10 & \Rightarrow & y_1 = 5 \\ y_1 & + & y_2 & & & = & 10 & \Rightarrow & y_2 = 5 \\ & & y_2 & + & 2y_3 & = & 9 & \Rightarrow & y_3 = 2 \end{array}$$

d) Ebenso kann man aus der Dreiecksmatrix U die Lösung x für $Ux = y$ von unten nach oben bestimmen:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 5 & \Rightarrow & x_1 = 1 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & = & 5 & \Rightarrow & x_2 = -1 \\ & & & & x_3 & = & 2 & \Rightarrow & x_3 = 2 \end{array}$$

○

12.2. Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist überbestimmt, es wurde in Abschnitt 7.8 gezeigt, dass die beste Lösung aus dem (nicht überbestimmten) Gleichungssystem

$$A^t Ax = A^t b$$

bestimmt werden kann.

a) Bestimmen Sie $A^t A$ und $A^t b$.

b) $A^t A$ ist eine symmetrische Matrix, finden Sie die Cholesky-Zerlegung $A^t A = LL^t$.

c) Lösen Sie $Ly = A^t b$.

d) Lösen Sie $L^t x = y$.

Lösung. a)

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^t b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$$

b) Nach dem in der Vorlesung besprochenen Algorithmus für die Cholesky-Zerlegung bestimmt man zuerst das Element in der Ecke links oben:

$$L = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & ? \end{pmatrix}$$

Aus der Gleichung

$$LL^t = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4+?^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

schliesst man dann, dass $? = \sqrt{2}$, also

$$L = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

c) y ist Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{10}{3}, \quad y_2 = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

d) x ist Lösung des Gleichungsystems

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{2}{3}, \quad x_1 = \frac{2}{3}$$

○

12.3. Können Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2+1 & a+1 \\ 1 & a+1 & 3 \end{pmatrix}$$

als Produkt $A = BB^t$ schreiben? Wenn ja bestimmen Sie eine solche Matrix B.

Lösung. Die Cholesky-Zerlegung ermöglicht, eine solche Zerlegung zu finden mit einer unteren Dreiecksmatrix L der Stelle von B.

Element 11:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & 0 & 0 \\ & & 0 \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ? & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad ?^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad ? = 1$$

Element 12:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ? & & 0 \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & ? & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot ? = 1 \quad \Rightarrow \quad ? = 1$$

Element 13:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & & 0 \\ ? & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & ? \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot ? = 1 \quad \Rightarrow \quad ? = 1$$

Element 22:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2+1 & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & ? & 0 \\ 1 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & ? & \\ 0 & & \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a^2 + 1 = 1 + ?^2 \quad \Rightarrow \quad ? = a$$

Element 23:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2+1 & a+1 \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & ? & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & ? \\ 0 & & \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a + 1 = 1^2 + a \cdot ? \quad \Rightarrow \quad ? = 1$$

Element 33:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2+1 & a+1 \\ 1 & a+1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & ? \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 3 = 1^2 + a^1 + ?^2 \quad \Rightarrow \quad ? = 1$$

Damit ist die Matrix L gefunden:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

wie man durch nachrechnen des Produkts LL^t verifizieren kann. ○

12.4. Diese Aufgabe ist eine Lernaufgabe, mit der Sie die Bestimmung der QR-Zerlegung erarbeiten können. Die Berechnungen in dieser Aufgabe werden mit Vorteil nur numerisch mit dem Taschenrechner durchgeführt.

a) Gegeben ist die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Wenden Sie den Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsprozess auf die Spalten von A an, die neuen Vektoren bilden die Matrix Q.

b) Ist die Matrix Q orthogonal? Ist das immer so, also nicht nur für diese spezielle Matrix A?

c) Finden Sie eine Matrix R derart, dass $A = QR$. Was fällt ihnen an der Matrix R auf?

d) Im Gram-Schmidt Prozess wurden die Spalten q_k so konstruiert, dass a_i eine Linearkombination von q_k mit $1 \leq k \leq i$ ist. Schreiben Sie diese Bedingung für jedes i mit Hilfe von Koeffizienten r_{ki}

e) Zeigen Sie, dass die Linearkombinationen von Teilaufgabe d) auch als Matrixprodukt $A = QR$ geschrieben werden kann.

Lösung. a) Das Orthonormalisierungsverfahren liefert

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.727607 \\ -0.485071 \\ -0.485071 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = \frac{a_2 - (a_2 \cdot b_1)b_1}{|Z|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} - 2.9104 \cdot b_1}{|Z|} = \frac{\begin{pmatrix} -2.11765 \\ -3.58824 \\ 0.41176 \end{pmatrix}}{|Z|} = \begin{pmatrix} -0.505790 \\ -0.857032 \\ 0.098348 \end{pmatrix}$$

$$b_3 = \frac{a_3 - (a_3 \cdot b_1)b_1 - (a_3 \cdot b_2)b_2}{|Z|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2.6679 \cdot b_1 + 0.29504 \cdot b_2}{|Z|} = \frac{\begin{pmatrix} -1.20805 \\ 0.45302 \\ -2.26510 \end{pmatrix}}{|Z|}$$
$$= \begin{pmatrix} -0.46343 \\ 0.17379 \\ -0.86893 \end{pmatrix}$$

Zusammengefasst in eine Matrix ist dies

$$Q = \begin{pmatrix} 0.727607 & -0.505790 & -0.463428 \\ -0.485071 & -0.857032 & 0.173785 \\ -0.485071 & 0.098348 & -0.868927 \end{pmatrix}.$$

b) Durch Ausmultiplizieren erhält man

$$QQ^t = \begin{pmatrix} 1 & 4.1633 \cdot 10^{-17} & -5.5511 \cdot 10^{-17} \\ 4.1633 \cdot 10^{-17} & 1 & -1.1102 \cdot 10^{-16} \\ -5.5511 \cdot 10^{-17} & -1.1102 \cdot 10^{-16} & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Terme außerhalb der Diagonalen sind praktisch gleich 0, sie sind durch Rundungsfehler entstanden.

c) Da Q orthogonal ist, ist $Q^{-1} = Q^t$, und wir können R direkt berechnen:

$$R = Q^{-1}A = Q^tA = \begin{pmatrix} 4.1231 & 2.9104 & -2.6679 \\ -3.3307 \cdot 10^{-16} & 4.1868 & -0.29504 \\ 6.6613 \cdot 10^{-16} & -2.2204 \cdot 10^{-16} & 2.6068 \end{pmatrix}$$

Bis auf die wieder durch Rundungsfehler verursachten Terme unter der Diagonalen ist dies eine rechte obere Dreiecksmatrix.

d) Es ist

$$\begin{aligned} a_1 &= r_{11}q_1 \\ a_2 &= r_{12}q_1 + r_{22}q_2 \\ a_3 &= r_{13}q_1 + r_{23}q_2 + r_{33}q_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

e) Aus der Definition des Matrixproduktes ("Zeilen × Spalten") liest man ab, dass

$$A = Q \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ 0 & 0 & r_{33} & \dots & r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_{nn} \end{pmatrix}.$$

○

12.5. Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Singulärwerte von A.

b) Welchen Rang hat A?

c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von Kern und Bild von A.

d) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\ker A^\perp$ und $\operatorname{im} A^\perp$.

e) Bestimmen Sie die Pseudoinverse $A^\dagger$ von A.

f) Berechnen Sie $P_1 = AA^\dagger$ und $P_2 = A^\dagger A$.

g) Überprüfen Sie, dass P_1 und P_2 Projektionen sind, also $P_1^2 = P_1$ und $P_2^2 = P_2$ gilt.

Lösung. Alle Teilaufgaben können, gelöst werden, wenn die Singulärwert-Zerlegung von A bekannt ist. Diese kann man finden, indem man das Eigenwertproblem für $B = AA^t$ und $C = A^tA$ löst:

$$B = AA^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 9 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = A^tA = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{4} & \frac{9\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{9\sqrt{3}}{4} & \frac{27}{4} \end{pmatrix}$$

Der zweite Standardbasisvektor e_2 ist ein Eigenvektor von B zum Eigenwert 9 und der erste Standardbasisvektor e_1 ist ein Eigenvektor von C zum Eigenwert 4. Es müssen jetzt nur noch Eignewertprobleme für die verbleibenden 2×2-Matrizen

$$B_0 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C_0 = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & \frac{9\sqrt{3}}{4} \\ \frac{9\sqrt{3}}{4} & \frac{27}{4} \end{pmatrix}$$

gelöst werden.

$$\begin{aligned} \chi_{B_0}(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} & \chi_{C_0}(\lambda) &= \begin{vmatrix} \frac{9}{4}-\lambda & \frac{9\sqrt{3}}{4} \\ \frac{9\sqrt{3}}{4} & \frac{27}{4}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)^2 - 4 & &= \left(\frac{9}{4}-\lambda\right)\left(\frac{27}{4}-\lambda\right) - \frac{243}{16} \\ &= \lambda^2 - 4\lambda = (\lambda-4)\lambda & &= \lambda^2 - 9\lambda = (\lambda-9)\lambda \end{aligned}$$

In beiden Fällen ist einer der Eigenwert 0, der andere ist 4 beziehungswiese 9. Die zugehörigen Eigenvektoren findet man mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\lambda = 0: \quad \boxed{\begin{matrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{matrix}} \to \boxed{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix} \frac{9}{4} & \frac{9\sqrt{3}}{4} \\ \frac{9\sqrt{3}}{4} & \frac{27}{4} \end{matrix}} \to \boxed{\begin{matrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{matrix}}$$

$$\vec{u}_0 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda \neq 0: \quad \boxed{\begin{matrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{matrix}} \to \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix} -\frac{27}{4} & \frac{9\sqrt{3}}{4} \\ \frac{9\sqrt{3}}{4} & -\frac{9}{4} \end{matrix}} \to \boxed{\begin{matrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 \end{matrix}}$$

$$\vec{u}_4 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_9 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Die Eigenvektoren sind bereits auf Länge 1 normiert. Die Eigenvektoren muss man jetzt in absteigender Reihenfolge der Eigenwert ein die Matrizen U und V einfüllen

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Die Singulärwerte sind

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{9} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist die Singulärwertzerlegung gefunden, man kann durch Nachrechnen prüfen, dass

$$A = U\Sigma V^t.$$

a) Die Singulärwerte von A sind 3, 2 und 0.

b) Der Rang ist die Anzahl der nicht verschwindenden Singulärwerte, also $\operatorname{rank} A = 2$.

c) Die gesuchten Basen können durch Auswahl von Spaltenvektoren aus den Matrizen U und V gefunden werden.

$$\ker A = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{und} \qquad \operatorname{im} A = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\rangle .$$

d) Die verbleibenden Vektoren bilden Orthonormalbasen der verlangten Orthogonalkomplemente:

$$\ker A^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{und} \qquad \operatorname{im} A^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\rangle .$$

e) Die Pseudoinverse erhält man aus dem Produkt

$$A^\dagger = V \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} .$$

f) Durch Ausmultiplizieren erhält man

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} .$$

g) Die Überprüfung ist eine simple Rechnung. ○

12.6. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 25u^2 & 5uv & 10u^2 \\ 5uv & v^2 + 9u^2 & -uv \\ 10u^2 & -uv & v^2 + 5u^2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } u > 0$$

mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung.

Lösung. Für die Cholesky-Zerlegung setzt man

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

und berechnet dann schrittweise die Matrixelemente l_{ik} von L durch Ausmultiplizieren von LL^t und Vergleich mit A:

$$\begin{aligned}
l_{11}^2 &= 25u^2 &&\Rightarrow\quad l_{11} = 5u\\
l_{11}l_{21} &= 5uv &&\Rightarrow\quad l_{21} = v\\
l_{11}l_{31} &= 10u^2 &&\Rightarrow\quad l_{31} = 2u\\
l_{22}^2 + l_{21}^2 &= v^2 + 9u^2 &&\Rightarrow\\
l_{22}^2 &= 9u^2 &&\Rightarrow\quad l_{22} = 3u\\
l_{22}l_{32} + l_{21}l_{31} &= -uv\\
3ul_{32} &= -uv - 2uv &&\Rightarrow\quad l_{32} = -v\\
l_{33}^2 + l_{32}^2 + l_{31}^2 &= v^2 + 5u^2\\
l_{33}^2 &= 5u^2 - 4u^2 &&\Rightarrow\quad l_{33} = u.
\end{aligned}$$

Daher ist

$$L = \begin{pmatrix} 5u & 0 & 0 \\ v & 3u & 0 \\ 2u & -v & u \end{pmatrix} \Rightarrow \det L = 15u^3.$$

Damit kann man jetzt auch die Determinante von A berechnen: $\det A = \det LL^t = (\det L)^2 = 15^2u^6 = 225u^6$. ○

12.7. Zeigen Sie, dass die Einheitsmatrix I postiv definit ist. Zeigen Sie weiter, dass die Matrix

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nicht positiv definit ist.

Lösung. Die Einheitsmatrix ist positiv definit, denn

$$v^t I v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1^2 + v_2^2 > 0$$

für $v \neq 0$.

Die Matrix

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist dagegen nicht definit, denn

$$v^t K v = 2v_1v_2$$

kann jeden beliebigen Wert in $\mathbb{R}$ annehmen. ○