Lösungen zu den Übungsaufgaben im Buch *Lineare Algebra: Eine anwendungsorientierte Einführung* von Andreas Müller, ISBN 978-3-662-67865-7, https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-67866-4, Website zum Buch: https://linalg.ch

Kapitel 13: Normalformen

13.1. Finden Sie eine Basis von $\mathbb{Q}^4$ derart, dass die Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} -13 & 5 & -29 & 29 \\ -27 & 11 & -51 & 51 \\ -3 & 1 & -2 & 5 \\ -6 & 2 & -10 & 13 \end{pmatrix}$$

Jordansche Normalform hat.

Lösung. Zunächst muss man die Eigenwerte finden. Dazu kann man das charakteristische Polynom berechnen, man findet nach einiger Rechnung oder mit Hilfe einer Software für symbolische Rechnung:

$$\chi_A(\lambda) = x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 44x + 24 = (x-3)(x-2)^2,$$

Eigenwerte sind also $\lambda = 3$ und $\lambda = 2$.

Der Eigenwert $\lambda = 3$ ist ein einfacher Eigenwert, der zugehörige Eigenraum ist daher eindimensional. Ein Eigenvektor kann mit Hilfe des linearen Gleichungssystems

$$\boxed{\begin{array}{cccc} -13-\lambda & 5 & -29 & 29 \\ -27 & 11-\lambda & -51 & 51 \\ -3 & 1 & -2-\lambda & 5 \\ -6 & 2 & -10 & 13-\lambda \end{array}} \rightarrow \boxed{\begin{array}{cccc} -16 & 5 & -29 & 29 \\ -27 & 8 & -51 & 51 \\ -3 & 1 & -5 & 5 \\ -6 & 2 & -10 & 10 \end{array}} \rightarrow \boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}}$$

gefunden werden. Daraus liest man den Eigenvektor

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Ab_1 = \begin{pmatrix} -13 & 5 & -29 & 29 \\ -27 & 11 & -51 & 51 \\ -3 & 1 & -2 & 5 \\ -6 & 2 & -10 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3b_1$$

ab.

Den Vektor b_1 können wir auch finden, indem wir $\mathcal{J}(A-2I)$ bestimmen. Die vierte Potenz von $A - 2I$ ist

$$(A-2I)^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

der zugehörige Bildraum ist wieder aufgespannt von b_1.

Aus (**??**) kann man aber auch eine Basis

$$b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

für den Kern $\mathcal{K}(A-2I)$ ablesen. Da $\lambda = 2$ der einzige andere Eigenwert ist, muss $\mathcal{K}(A-2I) = \mathcal{J}(A-3I)$ sein. Dies lässt sich überprüfen, indem wir die vierte Potenz von $A-3I$ berechnen, sie ist

$$(A-3I)^4 = \begin{pmatrix} 79 & -26 & 152 & -152 \\ 162 & -53 & 312 & -312 \\ 12 & -4 & 23 & -23 \\ 24 & -8 & 46 & -46 \end{pmatrix}.$$

Die Spaltenvektoren lassen sich alle durch die Vektoren b_2, b_3 und b_4 ausdrücken, also ist $\mathcal{J}(A-3I) = \langle b_2, b_3, b_4 \rangle$.

Indem die Vektoren b_i als Spalten in eine Matrix T schreibt, kann man jetzt berechnen, wie die Matrix der linearen Abbildung in dieser neuen Basis aussieht, es ist

$$A' = T^{-1}AT \left(\begin{array}{r|rrr} 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -13 & 5 & 29 \\ 0 & -27 & 11 & 51 \\ 0 & -3 & 1 & 8 \end{array}\right),$$

wir haben also tatsächlich die versprochene Blockstruktur.

Der 3×3-Block

$$A_1 = \begin{pmatrix} -13 & 5 & 29 \\ -27 & 11 & 51 \\ -3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

in der rechten unteren Ecke hat den dreifachen Eigenwert 2, und die Potenzen von $A_1 - 2I$ sind

$$A_1 - 2I \begin{pmatrix} -15 & 5 & 29 \\ -27 & 9 & 51 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \qquad (A_1-2I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -6 \\ 9 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A_1-2I)^3 = 0.$$

Für die Jordan-Normalform brauchen wir einen von 0 verschiedenen Vektor im Kern von $(A_1-2I)^2$, zum Beispiel den Vektor mit den Komponenten $1, 3, 1$. Man beachte aber, dass diese Komponenten jetzt in der neuen Basis $b_2, \dots, b_4$ zu verstehen sind, d. h. der Vektor, den wir suchen, ist

$$c_3 = b_1 + 3b_2 + b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Jetzt berechnen wir die Bilder von c_3 unter $A-2I$:

$$c_2 = \begin{pmatrix} 29 \\ 51 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}, \qquad c_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ -18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Basis b_1, c_1, c_2, c_3 ist also eine Basis, in der die Matrix A Jordansche Normalform annimmt.

Die Umrechnung der Matrix A in die Basis $\{b_1, c_1, c_2, c_3\}$ kann mit der Matrix

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 29 & 1 \\ 0 & -18 & 51 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 12 & 2 \end{pmatrix}, \qquad T_1^{-1} = \frac{1}{216}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 432 & -216 \\ 33 & -23 & -36 & 36 \\ 18 & -6 & 0 & 0 \\ -108 & 36 & -216 & 216 \end{pmatrix}$$

erfolgen und ergibt die Jordansche Normalform

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

wie erwartet. ○