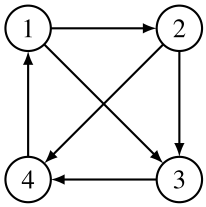
Lösungen zu den Übungsaufgaben im Buch *Lineare Algebra: Eine anwendungsorientierte Einführung* von Andreas Müller, ISBN 978-3-662-67865-7, https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-67866-4, Website zum Buch: https://linalg.ch

Kapitel 14: Positive Matrizen

14.1. Gegeben ist das Modell-Internet mit folgender Link-Struktur

a) Berechnen Sie die Google-Matrix **ohne** freien Willen und bestimmen Sie die Besuchswahrscheinlichkeiten $P(S_i)$.

b) Berechnen Sie die Google-Matrix **mit** freiem Willen mit $\alpha = 0.9$ und bestimmen Sie die Besuchswahrscheinlichkeiten $P(S_i)$.



Lösung. a) Die Verlinkungsmatrix dieses Modell-Internets ist

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Eigenvektoren können zum Beispiel mit Octave oder Matlab mit dem Befehl `[V, lambda] = eig(H)` gefunden werden. Man beachte aber, dass die so gefundenen Eigenvektoren in den Spalten der Matrix `V` Norm 1 haben, für einen Wahrscheinlichkeitsvektor müssen aber alle Einträge des Vektors nichtnegativ sein und müssen sich zu 1 summieren. Dies für die Spalte i der Matrix `V` kann durch den Befehl `V(:,i) / sum(V(:,i))`

Da man aber den Eigenwert kennt, kann man auch $(H - E)p = 0$ lösen, was mit dem Gaussalgorithmus effizient möglich ist:

$$\begin{array}{|cccc|}\hline -1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ \hline \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Die letzte Variable ist wie erwartet frei wählbar, setzen wir sie auf 1, erhalten wir als Lösungsvektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor hat nicht die gewünschte Normierung: Für einen Vektor von Wahrscheinlichkeiten müssen die Komponenten sich zu 1 aufaddieren. Dies kann man aber immer erreichen, indem man durch die Summe der Komponenten teilt:

$$p = \frac{4}{13} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.307692 \\ 0.153846 \\ 0.230769 \\ 0.307692 \end{pmatrix}.$$

Auch mit Hilfe des in der Vorlesung vorgeführten Iterationsalgorithmus kann man folgenden Eigenvektor zum Eigenwert 1 finden:

$$\begin{pmatrix} 0.307692 \\ 0.153846 \\ 0.230769 \\ 0.307692 \end{pmatrix}$$

Man kann dies auch mit Hilfe des beigefügten kleinen Programms `google.cpp` herausfinden. Dass die Seiten 1 und 4 gleich bewertet sind ist darauf zurückzuführen, dass alle Besucher von Seite 4 unbedingt auf Seite 1 weitergeleitet werden, somit müssen die beiden Seiten gleich viele Besucher haben.

b) Bei der Berücksichtigung des Freien Willens wird die Matrix zu

$$\alpha H + \frac{1-\alpha}{N} A = \begin{pmatrix} 0.025 & 0.025 & 0.025 & 0.925 \\ 0.475 & 0.025 & 0.025 & 0.025 \\ 0.475 & 0.475 & 0.025 & 0.025 \\ 0.025 & 0.475 & 0.925 & 0.025 \end{pmatrix},$$

wobei die Matrix A aus lauter Einsen besteht.

$$\begin{pmatrix} 0.300761 \\ 0.160342 \\ 0.232496 \\ 0.306401 \end{pmatrix}$$

Man kann sehen, dass die Einführung des “freien Willens” die Unterbewertung der Seite 2 etwas anhebt auf Kosten der überbewerteten Seiten 1 und 4.

Interessant ist auch, dass selbst die Verwendung sehr kleine Werte von α nahe 0 nicht zu einer Änderung der Rangfolge der vier Seiten führt. ○